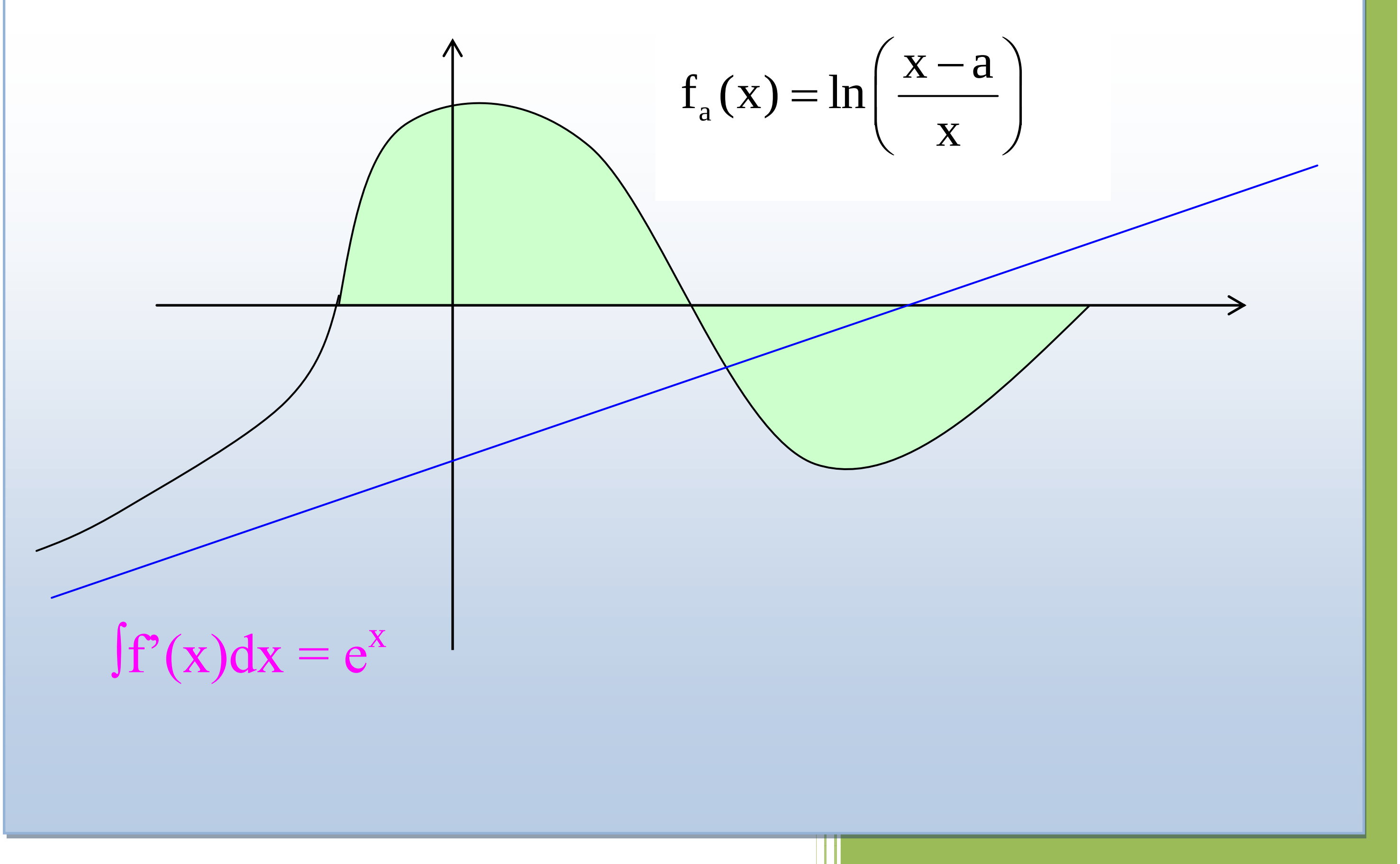
Skripten für die Oberstufe

Analysis Q11 und Q12



www.drothler.net

Inhalt

§01. Grundbegriffe (Wdh.)

1. Funktion

Eine Menge von Zahlenpaaren (x;y) heißt *Funktion* und die Menge D_f der x-Werte *Definitionsmenge* von f, wenn jedem $x \in D_f$ genau ein y zugeordnet ist.
Die Menge der y-Werte heißt dann *Wertemenge* W_f

Schreibweise	Name	Beispiel
f(x)	Funktionsterm	$x^2 + 3x + 2$
$f: x \mapsto f(x)$	Zuordnungsvorschrift	$f: x \mapsto x^2 + 3x + 2$
f: y = f(x)	Funktionsgleichung	$f: y = x^2 + 3x + 2$

Beispiel: $x \mapsto x^2$ $D_f = \mathbb{R}$; $W_f = \mathbb{R}^+$

2. Definitionsmenge

Ist nichts weiter vorgegeben, so ist die Definitionsmenge stets $\mathbb{R}$. Allerdings gibt es drei Ausnahmen: **B**rüche **W**urzeln **L**ogarithmen

① **Brüche** $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$

Der Ansatz **n(x) = 0** (Nenner Null setzen) liefert die *Definitionslücken* der Funktion.

② **Wurzeln** $f(x) = \sqrt{r(x)}$

Der Ansatz **r(x) ≥ 0** liefert die *Definitionsmenge* der Funktion

③ **Logarithmen** $f(x) = \log_b [a(x)]$

Der Ansatz **a(x) > 0** liefert die *Definitionsmenge* der Funktion

Beispiel: $f(x) = \log_2 (-3x + 9)$

$-3x + 9 > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -3$ $\quad D_f =]-\infty;-3[$

3. Achsenschnittpunkte

Die Stellen (x-Werte) $x_1, x_2, \ldots$, an denen die Funktion den Wert Null annimmt, nennt man *Nullstellen*. Die zugehörigen Punkte $N_1(x_1/0), N_2(x_2/0), \ldots$ sind die *Schnittpunkte* des Graphen *mit der x-Achse*. Bedingung: f(x) = 0.
Der *Schnittpunkt mit der y-Achse* hat die Koordinaten $S_y(0/f(0))$

Beispiel:
Bestimme für die Funktion $f: x \mapsto x^2 - 3x$
a) die Schnittpunkte des Graphen mit den Achsen und b) die Werte f(4), f(–2)

Lösung:

a) SP mit x-Achse
Bed.: f(x) = 0
Damit: $x^2 - 3x = 0$
$x(x - 3) = 0$
$x_1 = 0$; $N_1(0/0)$
$x_2 = 3$; $N_2(3/0)$

SP mit y-Achse
f(0) = 0
$S_y(0/0)$

b) $f(4) = 16 - 12 = \underline{4}$
$f(-2) = 4 + 6 = \underline{\underline{10}}$

§02. Rationale Funktionen

1. Definitionen

Eine Funktion

$$f:\, x \mapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_o}$$ mit a_n; $b_n \neq 0$ heißt *rationale Funktion*.

▶ Ist das Nennerpolynom konstant, so ist f eine *ganzrationale Funktion*, sonst eine *gebrochenrationale Funktion*.

▶ a_n bzw, b_m heißt *Leitkoeffizient* und n bzw. m der *Grad des Zähler-/bzw. Nennerpolynoms*.

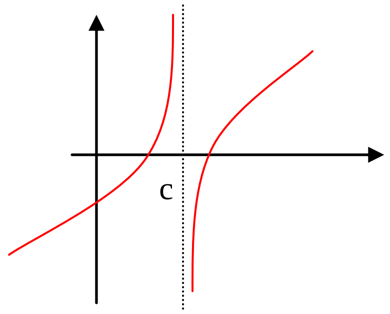
▶ Ist $c \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle des Nenners, dann
- enthält das Nennerpolynom den Faktor $(x – c)$,
- heißt die Stelle $x = c$ *Definitionslücke*
- heißt $(x – c)$ der zugehörige *kritische Faktor*.

Beispiele:

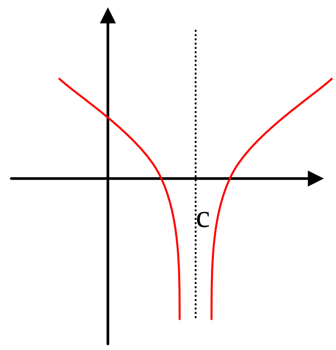
$f:\, x \mapsto 3x^2 + 4x + 2$:	ganzrationale Funktion 2. Grades Leitkoeffizient: 3	$D = \mathbb{R}$
$f:\, x \mapsto \dfrac{-3x^3 + 2x^2 + 1}{-x-4}$:	gebrochenrationale Funktion, Zähler: Grad 3, Leitkoeffizient: –3 Nenner: Grad 1, Leitkoeffizient: –1	$D = \mathbb{R}\backslash\{-4\}$

2. Eigenschaften von gebrochenrationalen Funktionen mit der Definitionslücke c

Fall a) *Der kritische Faktor $(x – c)^k$ lässt sich nicht aus dem Nenner kürzen:*
$x = c$ heißt *Polstelle k-ter Ordnung*. Der Graph besitzt eine vertikale („senkrechte“) Asymptote mit der Gleichung $x = c$

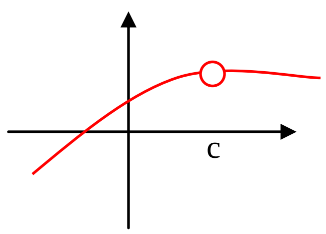


k ungerade: VZW



k gerade: kein VZW

Fall b) *Der Faktor $(x – c)^k$ lässt sich vollständig aus dem Nenner kürzen:*
$x = c$ ist zwar Definitionslücke aber keine Polstelle. „Loch“ im Graphen



3. Grenzwerte für $x \to x_o$

Problem: Es sollen die Definitionslücken bestimmt und das Verhalten einer Funktion in der Nähe dieser Lücken untersucht werden am Beispiel f: $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2-3x-4}$

Lösung: Faktorzerlegung: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-3x-4} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-4)}$

Definitionslücken: $x_1 = -1$; $x_2 = 4$.

- Setzt man für x in Zähler und Nenner den Wert $x_1 = -1$ ein, so werden beide Null („$\frac{0}{0}$“). Nach Kürzen des kritischen Faktors (x + 1) erhält man den Wert $a = \frac{2}{5}$.

> Man sagt in diesem Fall: „*f hat für $x \to x_o$ den Grenzwert a* “,
> Schreibweise: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ Sprich: „limes x gegen x_o von f(x) ist gleich a“

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-4)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x-4} = \frac{2}{5}$$

- Setzt man für x in Zähler und Nenner Werte nahe $x_2 = 4$ ein, so wird der Nenner betragsmäßig beliebig klein und der Bruch betragsmäßig beliebig groß.
  Beim Einsetzen von Werten x < 4 (linksseitige Annäherung), ist der Bruch negativ, bei Werten x > 4 (rechtsseitige Annäherung), ist der Bruch positiv.
  Es existiert also kein Grenzwert, man schreibt in diesem Fall allgemein:

> $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = -\infty / +\infty$ bzw. $\lim\limits_{x\to x_o^+} f(x) = -\infty / +\infty$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-4)} = \lim_{x\to 4^-} \frac{x-1}{x-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-4)} = \lim_{x\to 4^+} \frac{x-1}{x-4} = +\infty$$

(Man erhält sowohl für den gekürzten als auch den ungekürzten Term dasselbe Ergebnis)

- Außerdem gilt:
  - $x_2 = 4$ ist Polstelle 1. Ordnung
  - vertikale Asymptote: x = 4

Bemerkung:

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ ist dann existent, wenn man sowohl bei Annäherung von rechts als auch von links an x_o den Wert a erhält.

Schreibweisen: von links: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{\substack{<\\ x\to x_0}} f(x) = a$

von rechts: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{\substack{>\\ x\to x_0}} f(x) = a$

Die Rechenregeln aus der 10. Jahrgangsstufe gelten analog.

TIPP: Um Grenzwerte zu bestimmen, sollte der Funktionsterm faktorisiert werden.

Beispiele:
Untersuche jeweils das Verhalten von f in der Umgebung der angegebenen Stelle x_o.

① f: $x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$; $x_o = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2$$

Damit: $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ Loch L(1|2)

② f: $x \mapsto \frac{x^2-1}{x-2}$; $x_o = 2$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-2} = +\infty$$

Vertikale Asymptote: $x = 2$

Tipp: In die nicht-kritischen Faktoren (hier also in (x – 1) und (x + 1)) den exakten Zahlenwert (hier: 2) einsetzen, erst im kritischen Faktor (hier: (x – 2)) die Annäherungsseite berücksichtigen und etwas wenig kleineres bzw. größeres als 2 einsetzen (z.B. 1,9 bzw. 2,1), um das Vorzeichen zu ermitteln.

③ f: $x \mapsto \frac{x^2}{x+2}$; $x_o = 1$

($x_o = 1$ keine Definitionslücke, d.h. getrennte Annäherung von links und rechts unnötig!)

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x+2} = \frac{1^2}{1+2} = \frac{1}{3}$$

4. Verhalten im Unendlichen

Definition
Eine Gerade mit dem Funktionsterm a(x) heißt *Asymptote* einer Funktion f, wenn die Differenz a(x) – f(x) für $x \to \infty$ gegen Null geht.

Untersuchung rationaler Funktionen

$$f: x \mapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_o} = \frac{x^n \cdot \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_o}{x^n}\right)}{x^m \cdot \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_o}{x^m}\right)}$$

Fall a) **n < m** *Grad des Zählerpolynoms kleiner als der des Nennerpolynoms*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_o}{x^n}\right)}{x^{m-n}\cdot\left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_o}{x^m}\right)} = 0\,;\quad \text{horizontale Asymptote: } y = 0$$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-2}$ $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0;$ $\quad$ horizontale Asymptote: y = 0

Fall b) **n = m** *Grad des Zählerpolynoms gleich dem des Nennerpolynoms*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_o}{x^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_o}{x^m}} = \frac{a_n}{b_m}\,;\quad \text{horizontale Asymptote } y = \frac{a_n}{b_m}$$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{2x+1-x^2}{2x^2-2}$ $\quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$ $\quad$ horizontale Asymptote: $y = -\dfrac{1}{2}$

Fall c) **n > m** *Grad des Zählerpolynoms größer als der des Nennerpolynoms*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{n-m}\cdot\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_o}{x^n}\right)}{\left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_o}{x^m}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x^{n-m}\cdot\frac{a_n}{b_m}\right) = \pm\infty$$

Das Vorzeichen des Grenzwerts hängt also vom Exponenten n–m und vom Vorzeichen des Bruchs $\dfrac{a_n}{b_m}$ ab:

Ist der Exponent n–m eine gerade Zahl, so haben beide Grenzwerte (für x→+∞ und für x→–∞) dasselbe VZ wie der Bruch $\dfrac{a_n}{b_m}$.

Ist der Exponent n–m eine ungerade Zahl, so hat der Grenzwert für x→–∞ das gegenteilige Vorzeichen wie der Bruch $\dfrac{a_n}{b_m}$ und der Grenzwert für x→+∞ dasselbe Vorzeichen wie der Bruch $\dfrac{a_n}{b_m}$.

Beispiele:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3+2x}{5-4x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x^{3-1}\cdot\frac{3}{-4}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = -\infty \quad \text{Exponent n–m = 2 (gerade)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2x^7}{5x-4x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(x^{7-2}\cdot\frac{2}{-4}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\infty \quad \text{Exponent n–m = 5 (ungerade)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+2x^7}{5x-4x^2} = \lim_{x\to-\infty}\left(x^{7-2}\cdot\frac{2}{-4}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = +\infty \quad \text{Exponent n–m = 5 (ungerade)}$$

Zur Berechnung der Asymptote: Polynomdivision ausführen

<u>Beispiele:</u>

- $f(x) = \dfrac{x^4 - x^3 + 2x^2}{x^2 + 1}$

  $f(x) = (x^4 - x^3 + 2x^2):(x^2 + 1) = x^2 - x + 1 + \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$

  $\underline{-(x^4 \qquad + x^2)}$

  $\quad - x^3 + x^2$

  $\quad \underline{-(- x^3 \qquad - x)}$

  $\qquad x^2 + x$

  $\qquad \underline{-(x^2 \qquad +1)}$

  $\qquad\qquad x - 1$

  Der Bruch („Divisionsrest“) geht gegen Null, der ganzrationale Anteil beschreibt die asymptotische Kurve:
  $y = x^2 - x + 1$ ist Gleichung der asymptotischen Kurve

- $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 2}{x^2 + 1}$

  $f(x) = (x^3 - x^2 \quad + 2):(x^2 + 1) = x - 1 + \dfrac{-x + 3}{x^2 + 1}$

  $\underline{-(x^3 \qquad + x)}$

  $\quad -x^2 - x + 2$

  $\quad \underline{-(-x^2 \qquad - 1)}$

  $\qquad - x + 3$

  schräge Asymptote: $y = x - 1$

<u>Hinweis:</u> Um das Grenzverhalten zu ermitteln, kann man einfach den Term der Asymptote betrachten. Dieser zeigt dasselbe Verhalten wie der Funktionsterm:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - x^2 + 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \to -\infty} (x - 1) = -\infty$$

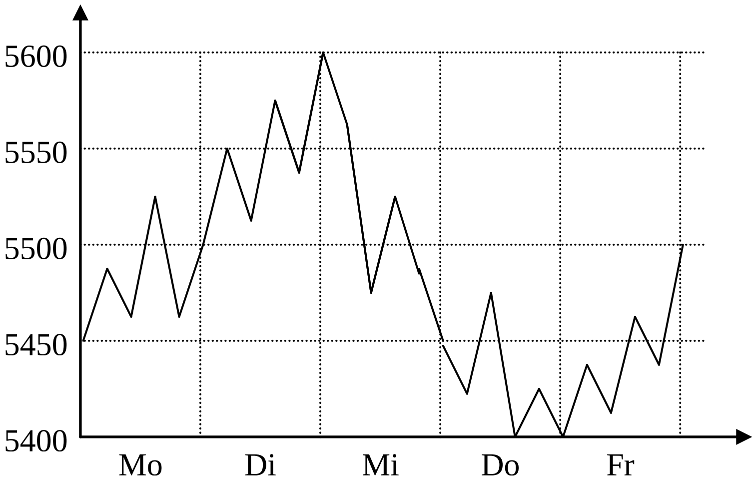
<u>Hinweis:</u> Polynomdivision zum Auffinden der Asymptote kommt so gut wie nicht mehr vor. Meist sind die Funktionsterme bereits in einer Form wie $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x^2 + 1}$ vorgegeben, so dass man die Asymptotengleichung sofort ablesen kann. Umgekehrt empfiehlt es sich, den Term als einen einzigen Bruch zu schreiben (Erweitern auf Hauptnenner)

$$f(x) = x - 1 + \frac{-x + 3}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} - \frac{1(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + \frac{-x + 3}{x^2 + 1} = \frac{x^3 + x - x^2 - 1 - x + 3}{x^2 + 1} = \frac{x^3 - x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

§03. Differenzierbarkeit

1. Mittlere Änderungsrate

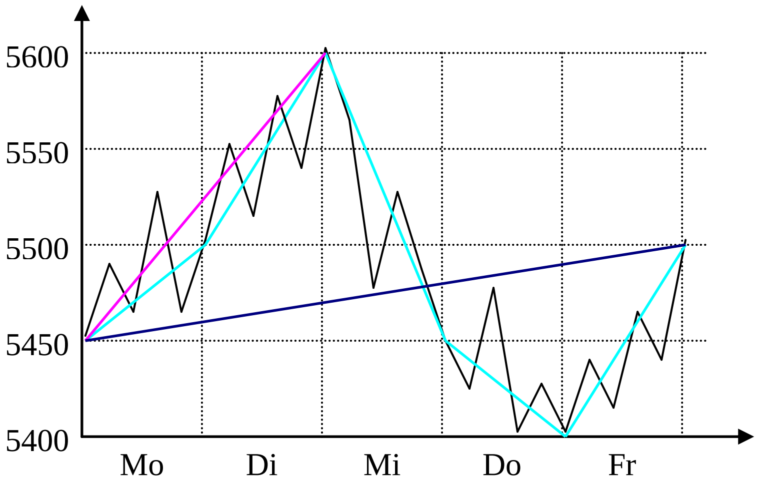
Beispiel: *Kursverlauf des DAX'*



Montag:	+50 Punkte/Tag	gesamte Woche:	+50 Punkte/Woche = 10 Punkte/Tag
Dienstag:	+100 Punkte/Tag	Montag–Dienstag:	+150 Punkte/(2Tage) = 75 Punkte/Tag
Mittwoch:	–150 Punkte/Tag		
Donnerstag:	–50 Punkte/Tag		
Freitag:	+100 Punkte/Tag		

Die *mittlere Änderungsrate* oder der *Differenzenquotient* ist der Quotient aus der Differenz der y-Werte und der Differenz der zugehörigen x-Werte von zwei betrachteten Punkten.

Geometrische Bedeutung

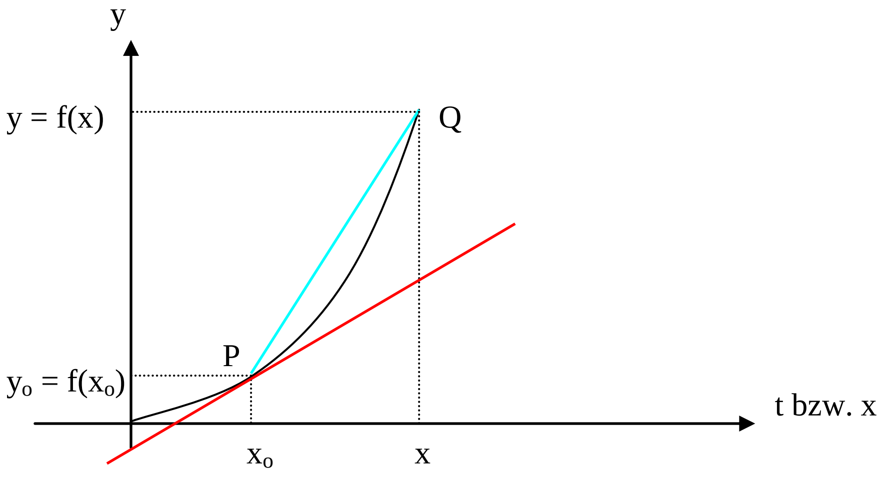


Der Differenzenquotient ist die Steigung m_s der Verbindungsstrecke der beiden Punkte.

2. Lokale Änderungsrate

Problem: Wie groß ist die (lokale) Änderungsrate zu einem bestimmten Zeitpunkt?

Beispiel: Der Graph der Funktion f(x) = x² beschreibt die Bewegung eines Autos, wobei x die Zeit t darstellt. Wie groß ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_o = x_o$



Die *mittlere Änderungsrate* ist hier die *mittlere Geschwindigkeit* der Bewegung von y_o nach y. Sie ist gleich der Steigung der Sekante. Die *lokale Änderungsrate* an der Stelle x_o ist die *Momentangeschwindigkeit* zum Zeitpunkt $t_o = x_o$. Geometrisch ist diese die Steigung der Tangente an der Stelle x_o.

Lösung: Der Punkt Q wandert auf dem Graphen zum Punkt P. Die zugehörige Sekantensteigung nähert sich immer mehr der gesuchten Tangentensteigung an.

Diese Tangentensteigung ist also gleich dem Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

3. Differenzierbarkeit

Definition

Eine Funktion f heißt *differenzierbar an der Stelle x_o*, wenn der Grenzwert

$f'(x_o) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

Der Grenzwert des *Differenzenquotienten* heißt *Differentialquotient*.
(Links- und rechtsseitiger Grenzwert müssen denselben Wert besitzen!)

Sprechweise: $f'(x_o)$: „f Strich von x_o“ bzw. „1. Ableitung von f an der Stelle x_o“

Bedeutung:
Der Graph der Funktion besitzt an der Stelle x_o eine eindeutige Tangente.
Der Wert $f'(x_o)$ gibt die Steigung m dieser Tangente an, bzw. die lokale Änderungsrate der Funktion an der Stelle x_o.

Beispiele:
Untersuche, ob die Funktionen an der angegeben Stelle x_o differenzierbar sind und bestimme ggf. $f'(x_o)$.

a) $f(x) = x^2 \quad x_0 = 3$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^+}(x+3) = 6$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}(x+3) = 6$$

f ist differenzierbar an der Stelle $x_o = 3$; $f'(3) = 6$

b) $f(x) = |2x - 1| \quad x_0 = 0{,}5$

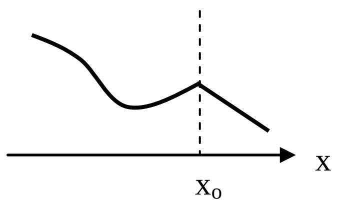
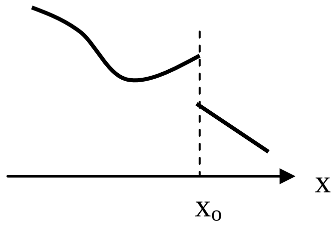
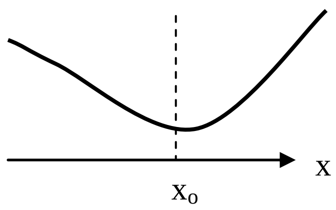
$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{für } x \geq 0{,}5 \\ -2x+1 & \text{für } x < 0{,}5 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0{,}5^+}\frac{f(x)-f(0{,}5)}{x-0{,}5} = \lim_{x\to 0{,}5^+}\frac{2x-1-0}{x-0{,}5} = \lim_{x\to 0{,}5^+}\frac{2(x-0{,}5)}{x-0{,}5} = 2$$

$$\lim_{x\to 0{,}5^-}\frac{f(x)-f(0{,}5)}{x-0{,}5} = \lim_{x\to 0{,}5^-}\frac{-2x+1-0}{x-0{,}5} = \lim_{x\to 0{,}5^-}\frac{-2(x-0{,}5)}{x-0{,}5} = -2$$

f ist nicht differenzierbar an der Stelle $x_o = 0{,}5$

Graphische Darstellung

f nicht differenzierbar bei $x = x_o$		f differenzierbar bei $x = x_o$
		
Knickstelle	Sprungstelle	kein Knick/Sprung

§04. Ableitungsfunktion

1. Definition

Eine Funktion f heißt *differenzierbar im Intervall [a;b]*, wenn sie an jeder Stelle $x_o \in]a;b[$ differenzierbar ist und die Differenzialquotienten bei a einen rechts- und bei b einen linksseitigen Grenzwert besitzen.
Die Menge aller x-Werte, für die f differenzierbar ist, heißt *Differenzierbarkeitsbereich $D_{f'}$*. Es gilt: $D_{f'} \subseteq D_f$
Die zu einer Funktion f in $D_{f'}$ definierte Funktion f: x α f'(x) heißt *Ableitungsfunktion von f.*

2. Grenzwertberechnung mit der h-Methode

Um einen Grenzwert für $x \to x_o$ zu bestimmen, addiert oder subtrahiert man zu x_o eine positive Zahl h und lässt diese gegen Null gehen:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_o - h)$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_o + h)$$

Beispiele:

① f: $x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$; $x_o = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0}\frac{(1-h)^2-1}{1-h-1} = \lim_{h\to 0}\frac{1-2h+h^2-1}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2h+h^2}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(-2+h)}{-h} = \lim_{h\to 0}(2-h) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{1+h-1} = \lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$$

Damit: $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

② f: $x \mapsto \frac{x^2-1}{x-2}$; $x_o = 2$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(2-h) = \lim_{h\to 0}\frac{(2-h)^2-1}{2-h-2} = \lim_{h\to 0}\frac{4-4h+h^2-1}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{3-4h+h^2}{-h} = \lim_{h\to 0}(-\frac{3}{h}+4-h) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(2+h) = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-1}{2+h-2} = \lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3+4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(\frac{3}{h}+4+h) = +\infty$$

Vertikale Asymptote: x = 2

Bestimmung der Ableitung $f'(x_0)$ mit der h-Methode:

$$\lim_{x\to x_o^+}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{x_o+h-x_o} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

$$\lim_{x\to x_o^-}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-h)-f(x_o)}{x_o-h-x_o} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-h)-f(x_o)}{-h}$$

3. Ableitungsfunktion von f: $x \mapsto x^n$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^n + nhx^{n-1} + ah^2x^{n-2} + \ldots + h^n - x^n}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{nhx^{n-1} + ah^2x^{n-2} + \ldots + h^n}{h} = \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + ahx^{n-2} + \ldots + h^{n-1}) = nx^{n-1}$$

Also: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ (Exponent davor, oben um eins erniedrigen)

Beispiele

$f(x) = x^2$ => $f'(x) = 2x$

$f(x) = x$ => $f'(x) = 1$

$f(x) = 3$ => $f'(x) = 0$ (Konstante wird zu Null)

$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ => $f'(x) = ½\, x^{-1/2} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ => $f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

4. Summe und Differenz zweier Funktionen

Problem: Es soll die Ableitung der Funktion f mit f(x) = g(x) + h(x) bestimmt werden.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-h(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)+h(x+h)-(g(x)-h(x))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)+h(x+h)-h(x)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{h(x+h)-h(x)}{h} = g'(x) + h'(x)$$

Merke:
Sind zwei Funktionen g und h in einem gemeinsamen Bereich differenzierbar, so gilt dies auch für ihre Summe bzw. Differenz und es gilt:
$f(x) = g(x) \pm h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

5. Multiplikation mit einer Konstanten

Problem: Es soll die Ableitung der Funktion f mit f(x) = c·g(x) bestimmt werden.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{cg(x+h)-cg(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(c\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) = c\cdot g'(x)$$

Merke:
Multipliziert man eine differenzierbare Funktion g mit einer Konstanten c, so ist die Ableitung das Produkt der Konstanten mit der Anleitungsfunktion g'.
$f(x) = c\cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = c\cdot g'(x)$

Beispiele

$f(x) = 3x + 5x^2 - 7 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2x - 7 \cdot 0 = 3 + 10x$

Merke
Multiplikative Konstanten bleiben beim Ableiten erhalten.
Additive Konstanten werden beim Ableiten zu 0

Beispiele:

$f(x) = 3x^2 + 5a^2 - 3ax^3 \quad \Rightarrow f'(x) = 6x - 9ax^2$

$f(a) = 3x^2 + 5a^2 - 3ax^3 \quad \Rightarrow f'(a) = 10a - 3x^3$

§05. Weitere Ableitungsregeln

1. Produktregel

Problem: Es soll die Ableitung des Produkts f = u · v mit f(x) = u(x)·v(x) bestimmt werden.
(D': Differenzierbarkeitsbereich von u und v)

Lösung: Differenzenquotient von f:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \frac{u(x)v(x)-u(x_o)v(x_o)}{x-x_o} = \frac{u(x)v(x)-u(x)v(x_o)+u(x)v(x_o)-u(x_o)v(x_o)}{x-x_o} =$$

$$= u(x)\frac{v(x)-v(x_o)}{x-x_o} + v(x_o)\frac{u(x)-u(x_o)}{x-x_o}$$

also: $f'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} =$

$$\lim_{x\to x_o} u(x) \lim_{x\to x_o} \frac{v(x)-v(x_o)}{x-x_o} + \lim_{x\to x_o} v(x_o) \lim_{x\to x_o} \frac{u(x)-u(x_o)}{x-x_o} = u(x_o)v'(x_o) + v(x_o)u'(x_o)$$

Damit gilt die

Produktregel
Sind u und v zwei in einem (gemeinsamen) Bereich D' differenzierbare Funktionen, so gilt:
$f(x) = u(x)\cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$

Beispiele:

$f(x) = x^2\cdot(3x-1) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = x^2\cdot 3 + 2x\cdot(3x-1) = 3x^2 + 6x^2 - 2x = 9x^2 - 2x$

$f(x) = \sqrt{x}\cdot(3x^2-5x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(3x^2-5x)+\sqrt{x}(6x-5) = \frac{3x^2-5x+2x(6x-5)}{2\sqrt{x}} =$

$$= \frac{3x^2-5x+12x^2-10x}{2\sqrt{x}} = \frac{15x^2-15x}{2\sqrt{x}}$$

2. Quotientenregel

Problem: Es soll die Ableitung des Quotienten $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ bestimmt werden.

(D': gemeinsamer Differenzierbarkeitsbereich von u und v)

Lösung: Differenzenquotient von f:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\frac{u(x)}{v(x)}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{x-x_0} = \frac{u(x)v(x_0)-u(x_0)v(x)}{v(x)v(x_0)(x-x_0)} =$$

$$= \frac{u(x)v(x_o)-v(x_o)u(x_o)+v(x_o)u(x_o)-u(x_o)v(x)}{v(x)v(x_o)(x-x_o)} =$$

$$= \frac{1}{v(x)v(x_o)} \cdot \frac{u(x)v(x_o)-v(x_o)u(x_o)-u(x_o)v(x)+v(x_o)u(x_o)}{(x-x_o)} =$$

$$= \frac{1}{v(x)v(x_o)} \cdot \frac{v(x_o)[u(x)-u(x_o)]-u(x_o)[v(x)-v(x_o)]}{(x-x_o)} =$$

$$= \frac{1}{v(x)v(x_o)} \left[v(x_o)\frac{u(x)-u(x_o)}{x-x_o} - u(x_o)\frac{v(x)\text{-}v(x_o)}{x-x_o} \right]$$

also: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_0} =$

$$\frac{1}{v(x_o)v(x_o)}\left[v(x_o)u'(x_o)-v'(x_o)u(x_o)\right] = \frac{v(x_o)u'(x_o)-v'(x_o)u(x_o)}{[v(x_o)]^2}$$

Damit gilt die

Quotientenregel

Sind u und v zwei in einem (gemeinsamen) Bereich D' differenzierbare Funktionen mit $v(x) \neq 0$ in D', so gilt:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{v(x)u'(x)-v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}$$

Beispiele:

$$f(x) = \frac{3x^3}{x^2-3} \qquad f'(x) = \frac{(x^2-3)\cdot(9x^2)-(2x)\cdot(3x^3)}{(x^2-3)^2} = \frac{9x^4-27x^2-6x^4}{(x^2-3)^2} = \frac{3x^4-27x^2}{(x^2-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{3+x^2}{x^3} \qquad f'(x) = \frac{x^3\cdot 2x-3x^2\cdot(3+x^2)}{x^6} = \frac{x^2[2x-3(3+x^2)]}{x^6} = \frac{2x-9-3x^2}{x^4}$$

§06. Stetigkeit

1. Begriff

<u>Definition</u>
Man nennt eine Funktion f mit Definitionsbereich D *stetig an einer Stelle x_o* im Inneren von D, wenn die Bedingung
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_o)$$
erfüllt ist.

<u>Bedeutung:</u>

① Überprüfe, ob x_o in D liegt. (Falls nicht ist die Frage nach der Stetigkeit sinnlos)

② Bestimme folgende 3 Terme:

a) $f(x_o)$

b) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

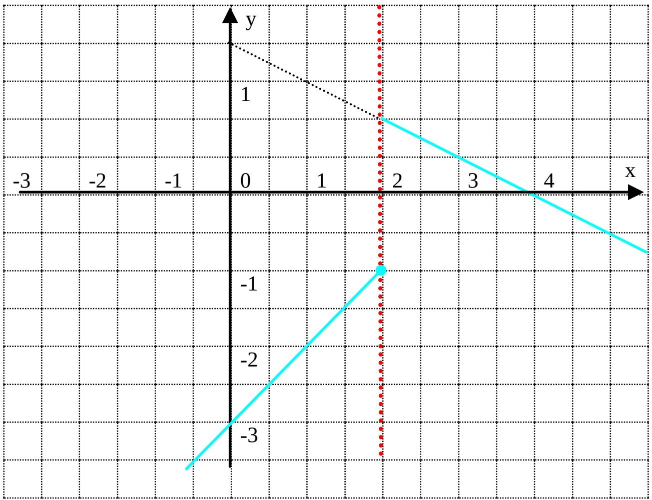
c) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

③ Überprüfe, ob alle drei denselben Zahlenwert haben (nicht ∞).

Wenn ja, dann ist f an der Stelle x_o stetig, wenn nein, dann ist f unstetig an der Stelle x_o.

<u>Beispiel:</u>

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{für } x \le 2 \\ 2-\frac{1}{2}x & \text{für } x > 2 \end{cases}$$



kritische Stelle: $x_o = 2$

① $f(2) = 2 - 3 = -1$

② $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x-3) = -1$

③ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2-\frac{1}{2}x) = 1$

f ist nicht stetig an der Stelle $x_o = 2$
Sprungstellen sind Unstetigkeitsstellen.

Gilt für alle $x_o \in$ D: f ist stetig an der Stelle x_o, so sagt man: „f ist stetig in D“.

<u>TIPP:</u> Jede stetige Funktion hat einen Graphen, den man ohne abzusetzen durchzeichnen kann.

2. Sätze über stetige Funktionen

Stetigkeit rationaler Funktionen

Jede *rationale Funktion* ist stetig in ihrem Definitionsbereich.

Wichtige Sätze

Nullstellensatz

Sei f eine in einem abgeschlossenen Intervall [a; b] stetige Funktion und die Stellen $x_1; x_2 \in [a; b]$.
Wenn die Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ verschiedene Vorzeichen haben, so gibt es mindestens eine Zahl $z \in \,]x_1; x_2[$ mit $f(z) = 0$

Extremwertsatz

Wenn f eine in einem abgeschlossenen Intervall [a; b] stetige Funktion ist, dann nehmen die Funktionswerte sowohl einen größten als auch einen kleinsten Wert in diesem Intervall an.

Zusammenhang Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Ist eine Funktion an der Stelle x_o differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

Hinweis: Die Umkehrung gilt nicht: An einer Knickstelle ist die Funktion zwar nicht differenzierbar, aber dennoch stetig!

§07. Anwendungen

1. Graphenpunkte mit horizontalen Tangenten

Bedingung für „horizontale Tangente“: $f'(x) = 0$

Beispiel: Bestimme die Punkte mit horizontalen Tangenten: $f(x) = 3x^2 + 2x^3$

Lösung: Es gilt: $f'(x) = 6x + 6x^2$

Bed.: $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow 6x + 6x^2 = 0 \quad \Rightarrow 6x(x + 1) = 0$

$x_1 = 0; \quad y_1 = f(0) = 0 \qquad P_1(0/0)$

$x_2 = -1; \quad y_1 = f(-1) = 3 - 2 = 1 \qquad P_2(-1/1)$

2. Scheitel einer Parabel

Beispiel: Bestimme den Scheitel der Parabel mit der Gleichung $y = 3x^2 + 3x$

Lösung: ① Ableiten:

$f'(x) = 6x + 3$

② Ableitung Null setzen und Koordinaten bestimmen

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x + 3 = 0$

$x = -0{,}5; \quad y = 3\cdot(-0{,}5)^2 + 3\cdot(-0{,}5) = -0{,}75 \qquad S(-0{,}5/-0{,}75)$

3. Tangentengleichung

Problem: Die Gleichung der Tangente im Punkt $P(x_o/f(x_o))$ soll bestimmt werden:
Tangentengleichung: $y = mx + t$ | gesucht: m und t

Lösung: $m = f'(x_o)$

für t: Punkt P in Tangentengleichung einsetzen:

$y = m \cdot x + t$

$f(x_o) = f'(x_o) \cdot x_o + t$

$t = f(x_o) - f'(x_o) \cdot x_o$

in Tangentengleichung m und t einsetzen:

$y = m \cdot x + t$

$y = f'(x_o) \cdot x + f(x_o) - f'(x_o) \cdot x_o$

Tangentengleichung
$y = f'(x_o) \cdot (x - x_o) + f(x_o)$

Beispiel : $f(x) = 5x^2 - 4 \quad P(2/\,?)$

Lösung: ① Ableiten: $f'(x) = 10x$

② Bestimme die drei für die Formel wichtigen Größen:

$x_o = 2$

$f(x_o) = 5\cdot2^2 - 4 = 16$

$f'(x_o) = 10\cdot2 = 20$

③ Setze ein und löse auf:

$y = 20\cdot(x-2) + 16$

$y = 20x - 40 + 16$

$t: y = 20x - 24$

4. Newton-Verfahren

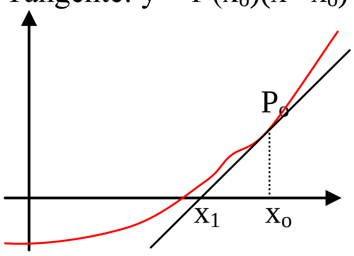
Problem: Nullstellen lassen sich nicht immer leicht berechnen. Mit einem Iterationsverfahren soll eine Näherung der Nullstelle gefunden werden.

Lösungsidee: Man nähert die Nullstelle x^* an zuerst durch einen Wert x_o (den Startwert), dann verbessert man die Annäherung (ausgehend von x_o) durch einen Wert x_1. Dann (ausgehend von x_1) durch einen Wert x_2....
Allgemein: Ausgehend von einem Wert x_n bestimmt man einen besseren Wert x_{n+1}

Newton-Verfahren:

① Man beginnt mit einem geschickt gewählten Startwert x_o.

② Vom Graphenpunkt $P_o(x_o|f(x_o))$ bestimmt man die Gleichung der Tangente: $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$



③ Die Nullstelle der Tangente ist der neue Näherungswert x_1:
Gleichung $0 = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$ nach x auflösen:

$f'(x_o)x - f'(x_o)\, x_o + f(x_o) = 0$

$f'(x_o)x = f'(x_o)\, x_o - f(x_o)$

$$\boxed{x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)}}$$

④ Dann wiederholt man die Prozedur mit dem Wert x_1.

Allgemein: Der Näherungswert x_{n+1} ergibt sich aus dem Wert x_n durch:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Beispiel: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 5$

Lösung: $f'(x) = 3x^2 - 10x + 8$

Wertetabelle zum Auffinden des Startwerts

x	0	1	2	3	4
f(x)	–5	–1	–1	1	11

Nach dem Nullstellensatz (§06 | 2.) muss f mindestens eine Nullstelle im Intervall]2; 3[haben. Als Startwert bietet sich der Mittelwert $x_o = 2,5$ an.

$f(2,5) = -0,625 \qquad f'(2,5) = 1,75$

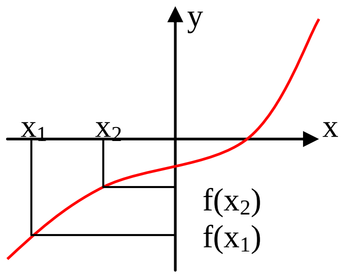
$$x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} = 2,5 - \frac{-0,625}{1,75} = 2,857142857$$

$x_2 = 2,764136905$ (mit Tabellenkalkulationsprogramm)....

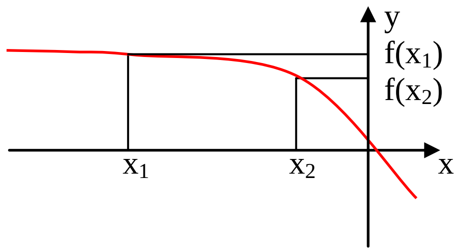
§08. Monotonie und Extrempunkte

1. Monotonieverhalten

Sei f eine Funktion f: $x \alpha f(x)$ mit $x \in D$. Gilt für alle und x_1; $x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$:
· $f(x_1) < f(x_2)$, so heißt f *streng monoton zunehmend*
· $f(x_1) \leq f(x_2)$, so heißt f *monoton zunehmend*
· $f(x_1) > f(x_2)$, so heißt f *streng monoton abnehmend*
· $f(x_1) \geq f(x_2)$, so heißt f *monoton abnehmend*



$f(x_1) < f(x_2)$
f ist streng monoton zunehmend
(y-Werte werden größer)

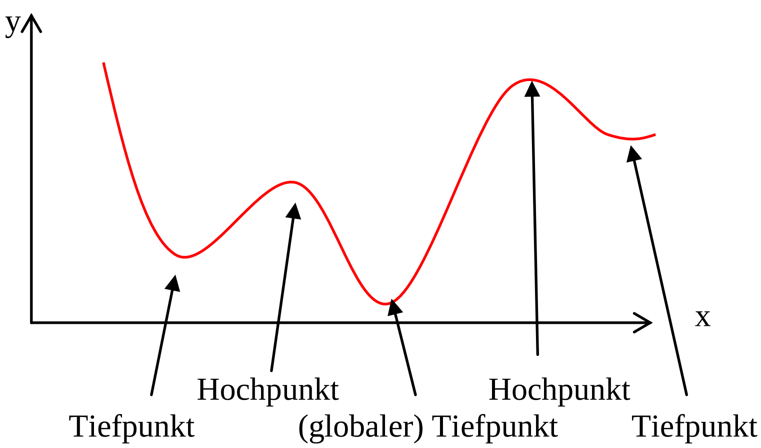


$f(x_1) \geq f(x_2)$
f ist monoton abnehmend
(y-Werte werden kleiner oder bleiben gleich)

2. Extremwerte

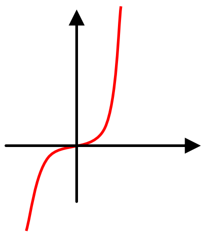
<u>Definitionen</u>

- Eine Funktion f hat im Inneren der Definitionsmenge ein *lokales Maximum (Minimum)*, wenn die Funktionswerte in einer gewissen Umgebung von x_o kleiner sind (größer sind) als bei x_o. Der größte (kleinste) Funktionswert in der Definitionsmenge heißt *globales Maximum (Minimum)*.
- Das *Extremum (Maximum/Minimum) – Plural: Extrema –* ist der Funktionswert $f(x_o)$
- Die *Maximal-/Minimalstelle* der zugehörige x-Wert x_o
- Der entsprechende Punkt heißt *Extrempunkt* (*Hochpunkt/Tiefpunkt*).



<u>Notwendige Bedingung für Extrema:</u>
Hat eine differenzierbare Funktion f im Innern von D_f ein Extremum, dann gilt: $f'(x_o) = 0$

<u>Achtung:</u> Aus $f'(x) = 0$ kann nicht die Existenz eines Extremums geschlossen werden:
$f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Dort liegt aber kein Extremum vor.



<u>Bemerkung:</u>
An einer Extremstelle ändert sich das Monotonieverhalten einer Funktion.
An der Minimalstelle von fallend nach steigend, an der Maximalstelle von steigend nach fallend.

3. Monotonieverhalten und Ableitung

<u>Satz:</u>
Gilt für die Ableitung einer im Intervall [a;b] stetigen und in]a;b[differenzierbaren Funktion:
$f'(x) > 0$ für $x \in$]a;b[, dann ist f streng monoton zunehmend für $x \in$ [a;b],
$f'(x) < 0$ für $x \in$]a;b[, dann ist f streng monoton abnehmend für $x \in$ [a;b].

Hierzu ist eine Vorzeichen–Tabelle hilfreich!

<u>Beispiel:</u>
Bestimme Lage und Art der Extrempunkte und das Monotonieverhalten von f mit
$f(x) = -x^3 + 12x^2 - 45x + 2$

<u>Lösung:</u>

① Bestimme die erste Ableitung $f'(x)$.

$f'(x) = -3x^2 + 24x - 45$

② Bestimme mit dem Ansatz $f'(x) = 0$ die Stellen mit waagrechter Tangente, faktorisiere den Term (bei Brüchen auch den Nenner!) und berechne die zugehörigen y-Koordinaten.

$f'(x) = 0$

$-3x^2 + 24x - 45 = 0$

$-3(x^2 - 8x + 15) = 0$

$-3(x - 5)(x - 3) = 0$

$x_1 = 5$; $y_1 = -48$ Es müssen die x-Werte in f(x) eingesetzt werden!
$x_2 = 3$; $y_2 = -52$

④ Untersuche nun die Vorzeichen der 1. Ableitung. Hilfreich dafür ist oft eine Vorzeichentabelle.

		3	5
– 3	–	–	–
x – 3	–	+	+
x – 5	–	–	+
f′(x)	–	+	–
		MIN	MAX

Benötigte Stellen zur Begrenzung der VZ-Bereiche sind immer
① alle Definitionslücken bzw. –ränder und
② die Nullstellen der 1. Ableitung.
Hier nur ②, nämlich 3 und 5

⑤ Gib nun die Monotoniebereiche und Extrempunkte an:

f ist streng monoton abnehmend für $x \in]-\infty; 3]$
f ist streng monoton zunehmend für $x \in [3; 5]$
f ist streng monoton abnehmend für $x \in [5; \infty[$

Tiefpunkt: T(3/-52)
Hochpunkt: H(5/-48)

§09. Umkehrfunktion

Bei einer Funktion wird jedem x genau ein y zugeordnet. Ordnet man nun umgekehrt jedem y die den entsprechenden x-Wert zu, so erhält man eine Umkehrzuordnung, die bei Eindeutigkeit (genau ein x zu jedem y) auch eine Funktion ist, die sog. Umkehrfunktion.

1. Bestimmung der Umkehrfunktion

Beispiel: f: $y = -x^2 + 2$ $D_f =]-\infty; 0]$ $W_f =]-\infty; 2]$

① Auflösen nach x

f: $y = -x^2 + 2$

f: $x^2 = -y + 2$

f: $x = \pm\sqrt{-y+2}$ Aufgrund von D gilt $x \leq 0$, deshalb muss man sich für das „–„ entscheiden

② Vertauschen der Variablen:

f^{-1}: $y = -\sqrt{-x+2}$ $D_{f^{-1}} =]-\infty; 2]$ $W_{f^{-1}} =]-\infty; 0]$

2. Umkehrbarkeit

Entsteht nach dem Variablentausch wieder eine Funktionsgleichung, so sagt man *f ist umkehrbar*.

Satz:
- Eine Funktion f ist genau dann umkehrbar, wenn für alle $x_1 \neq x_2$ folgt: $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Eine streng monotone Funktion ist umkehrbar.

3. Eigenschaften

- Der Graph der Umkehrfunktion geht aus dem Graphen der Funktion durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten hervor.

- Für Werte- und Definitionsmengen gilt:
  $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$

- Die Umkehrfunktion einer streng monoton zunehmenden (abnehmenden) Funktion ist streng monoton zunehmend (abnehmend).

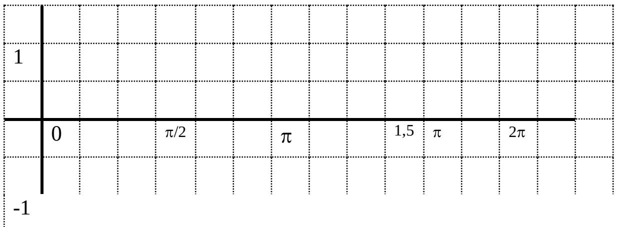
- Es gilt: ① $(f^{-1})^{-1} = f$
  ② $f(f^{-1}(x)) = x$
  ③ $f^{-1}(f(x)) = x$

  Bsp.: $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(-x^2 + 2) = -\sqrt{-(-x^2+2)+2} = -\sqrt{x^2} = -|x| = x$

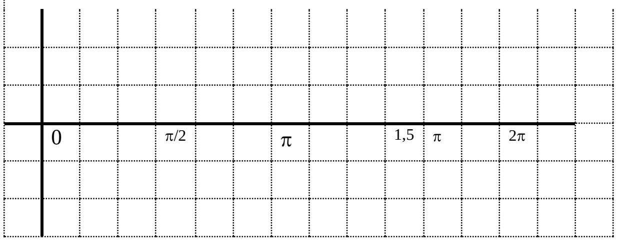
§10. Ableitung von Sinus- und Kosinusfunktion

1. Graphisches Verfahren

Gegeben ist der Graph der Funktion
f: x $\mapsto$ sin x.



Ermittle den Graphen
der zugehörigen Ableitungsfunktion.



Ergebnis: Es gilt: f(x) = sinx => f'(x) = cosx

Außerdem gilt: f(x) = cosx => f'(x) = –sinx

2. Rechnerisches Verfahren

Einschub: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Problem: f(x) = sinx => f'(x) = ?

Lösung: Differenzenquotient von f:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\cos(\frac{1}{2}(x+h+x))\sin(\frac{1}{2}(x+h-x))}{h}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}$$

Also: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}=\lim\limits_{h\to 0}\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}=\cos x$

§11. Ableitung verketteter Funktionen

1. Verkettete Funktionen

Definition:
Für 2 Funktionen v: x α v(x) und u: x α u(x) heißt die Funktion
u o v: x α u(v(x)) (Lies:„u nach v: x auf u von v(x)“)
Verkettung der Funktionen u und v.
v heißt *innere* und u *äußere Funktion.*

Beispiel: $u(x) = x^2 + 1$ $v(x) = \sin x$
Bestimme die Funktionsterme von $f = u \circ v$ und $g = v \circ u$

Lösung: $f(x) = u(v(x)) = u(\sin x) = (\sin x)^2 + 1$
$g(x) = v(u(x)) = v(x^2 + 1) = \sin(x^2 + 1)$

2. Kettenregel

Problem: Es soll die Ableitung der verketteten Funktion $f = u \circ v$ mit $f(x) = u(v(x))$ bestimmt werden. (D’: Differenzierbarkeitsbereich von $u \circ v$)

Lösung: Differenzenquotient von f:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \frac{u(v(x))-u(v(x_o))}{x-x_o} = \frac{[u(v(x))-u(v(x_o))]\cdot[v(x)\text{-}v(x_o)]}{(x-x_o)\cdot[v(x)\text{-}v(x_o)]} =$$

$$= \frac{u(v(x))-u(v(x_o))}{v(x)\text{-}v(x_o)} \cdot \frac{v(x)\text{-}v(x_o)}{x-x_o};$$

also: $f'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = u'(v(x_o)) \cdot v'(x_o)$

$$\boxed{f(x) = u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)}$$

Also: Erst die äußere Funktion ableiten, dabei die innere stehen lassen und dann die innere Funktion ableiten und dazu multiplizieren („*Nachdifferenzieren* der inneren Funktion“)

Beispiele:

- $f(x) = \sin(3x^2 - 4x)$ => $f'(x) = \cos(3x^2 - 4x) \cdot (6x - 4)$
- $f(x) = (x^3 - 7x^2)^9$ => $f'(x) = 9(x^3 - 7x^2)^8 \cdot (3x^2 - 14x)$
- $f(x) = \sqrt{\sin(x^3 + 2)}$ => $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x^3+2)}} \cdot \cos(x^3+2) \cdot 3x^2 = \frac{3x^2\cos(x^3+2)}{2\sqrt{\sin(x^3+2)}}$

Hinweis: Bei manchen Funktionen muss mehrmals nacheinander nachdifferenziert werden.

- $f(x) = 3x \cdot \sin\left(\sqrt{x^2+2}\right)$ => $f'(x) = 3 \cdot \sin\left(\sqrt{x^2+2}\right) + 3x \cdot \cos\left(\sqrt{x^2+2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \cdot 2x =$

$$= 3 \cdot \sin\left(\sqrt{x^2+2}\right) + \frac{3x^2 \cdot \cos\left(\sqrt{x^2+2}\right)}{\sqrt{x^2+2}}$$ Produktregel (§05 | 1.)

§12. Die natürliche Exponentialfunktion

1. Exponentialfunktion

Beispiel:
In einer Bakterienkultur verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien nach einer Stunde. Aus wie viel Bakterien besteht die Kultur nach 5 Stunden, wenn sie anfangs aus 10 000 bestand?

Lösung:
Funktionsterm: $\boxed{y = a \cdot b^x}$ a: Anfangswert; b: Wachstumsfaktor („Erhöhung auf...“)

Hier: $a = 10\,000$; $b = 2$

Also: $y = 10\,000 \cdot 2^x$

Nach 5 Stunden: $y = 10\,000 \cdot 2^5 = 320\,000$

2. Ableitung

Problem: Es soll die Ableitung der Exponentialfunktion mit $f(x) = b^x$ bestimmt werden.

Lösung: Differenzenquotient/Differentialquotient

$$\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = \frac{b^{x_0+h}-b^{x_0}}{h} = \frac{b^{x_0}b^h-b^{x_0}}{h} = b^{x_0}\frac{b^h-1}{h}$$

Damit: $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} b^{x_0}\frac{b^h-1}{h} = b^{x_0}\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}$

Bestimmung des Grenzwerts $\lim\limits_{x\to 0}\frac{b^h-1}{h}$ mit Tabellenkalkulation.

Ergebnis: Es existiert ein Wert für b, so dass der Grenzwert 1 wird.

Bestimmung dieses Werts für b:

Es muss gelten: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h} = 1$ Für h kann man $\frac{1}{n}$ einsetzen und $n \to \infty$ laufen lassen.

Damit: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1$; Zähler und Nenner des Bruchs müssen für große n gleich sein.

Also $b^{\frac{1}{n}}-1 \approx \frac{1}{n}$ bzw. $b^{\frac{1}{n}} \approx \frac{1}{n}+1$; somit: $b \approx \left(\frac{1}{n}+1\right)^n$

Der exakte Wert errechnet sich als Grenzwert für $n \to \infty$:

Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)^n$ existiert und ist eine irrationale Zahl. Sie heißt *Euler'sche Zahl* und wird mit e bezeichnet.
Näherungswert: $e \approx 2{,}718281828...$

Somit gilt für die Funktion mit $f(x) = e^x$: $f'(x_0) = e^{x_0}\lim\limits_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h} = e^{x_0}\cdot 1 = e^{x_0}$

3. Die natürliche Exponentialfunktion

Die Funktion f: x $\mapsto$ e^x heißt *natürliche Exponentialfunktion*.

Für ihre Ableitungsfunktion gilt: f'(x) = e^x

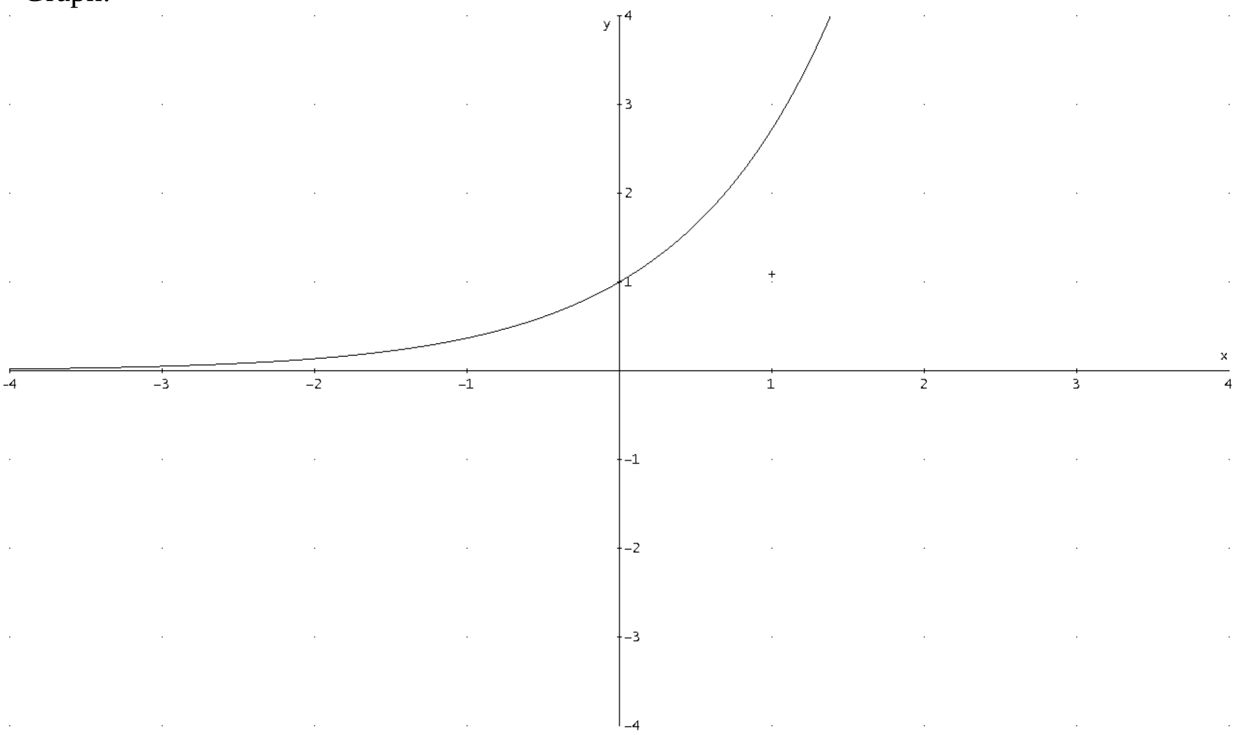
Eigenschaften:

f: x α e^x

- Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$
- Nullstellen: Da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt: Es gibt keine Nullstellen
- SP mit y-Achse: $f(0) = e^0 = 1$ also : $S_y(0/1)$
- Ränder von D_f: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$ für x > 0 keine Asymptote

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ für x < 0 : horizontale Asymptote: **y = 0**
- Ableitung und Monotonie: Es gilt: f'(x) = e^x

  Da f'(x) > 0, ist f streng monoton zunehmend im Definitionsbereich *D*.
- Graph:



Besonderheiten:

- Untersuche das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion f mit f(x) = $\frac{e^x-1}{e^x+1}$

  $$f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{\left(e^{-x}-1\right)\cdot e^x}{\left(e^{-x}+1\right)\cdot e^x} = \frac{e^0-e^x}{e^0+e^x} = \frac{1-e^x}{1+e^x} = \frac{-e^x+1}{e^x+1} = -\frac{e^x-1}{e^x+1} = -f(x)$$

  Also ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung.
- Bestimme die Ableitung von f(x) = e^{3x^2+2x}

  f'(x) = $e^{3x^2+2x} \cdot (6x+2)$ (Kettenregel!)

§13. Die natürliche Logarithmusfunktion

1. Umkehrfunktion der e-Funktion

Da g: $x \mapsto e^x$ eine streng monotone Funktion ist, ist sie umkehrbar.

g: $y = e^x$ $D_f = \mathbb{R}$ $W_f = \mathbb{R}^+$

$\log_e y = x$ Abkürzung: $\log_e y = \ln y$ ("Logarithmus naturalis")

$g^{-1}: y = \ln x$

Die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion heißt *natürliche Logarithmusfunktion* f: $x \mapsto \ln x$.

Es gilt für f: $D_f = \mathbb{R}^+$ $W_f = \mathbb{R}$

2. Eigenschaften von f: $x \mapsto \ln x$ $D_f =]0;\infty[$

Beziehungen

Es gelten die Formeln:

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ $\ln(e^x) = x$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ $e^{\ln x} = x$

$\ln(a^b) = b \cdot \ln a$

Mit $e^{\ln x} = x$ bestimmt man die Ableitung:

$(e^{\ln x})' = 1$;

$e^{\ln x} (\ln x)' = 1$ (Kettenregel)

$x (\ln x)' = 1$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

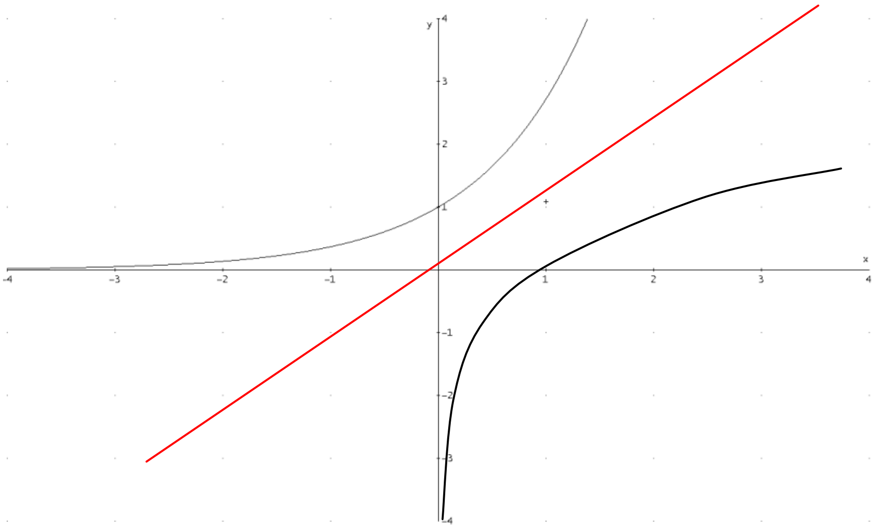
Beispiele

Löse die Gleichungen $e^{x-1} = 2$ und $\ln(2x-3)^2 = 0$

- $e^{x-1} = 2$ | ln..
  $x - 1 = \ln 2$
  $x = \ln 2 + 1 \approx 1.69$
- $\ln(2x-3)^2 = 0$
  $2 \cdot \ln(2x-3) = 0$
  $\ln(2x-3) = 0$| e¨
  $2x - 3 = e^0$
  $2x - 3 = 1$
  $2x = 4$
  $x = 2$

<u>Weitere Eigenschaften</u>

• Graph:



• einzige Nullstelle: x = 1 ln 1 = 0 N(1|0)

• Verhalten an den Rändern von D: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ für x > 0 keine Asymptote

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ vertikale Asymptote: **x = 0**

• Ableitung und Monotonie: f(x) = lnx $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, da x > 0

Da f'(x) > 0, ist f streng monoton zunehmend im Definitionsbereich D.

3. Verkettete Funktionen x α ln (g(x))

Die Funktion g(x) heißt *Argument der ln-Funktion*.

<u>Beispiel:</u> Bestimme für f mit f(x) = ln(2x + 2) Definitionsmenge, Nullstellen und Ableitung

• Definitionsmenge: *Argument > 0*

Bed.: 2x + 2 > 0 => x > –1

Also: $D_f =]-1;\infty[$

• Nullstellen: Bed.: f(x) = 0

ln(2x + 2) = 0

2x + 2 = 1

x = –0,5

• Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{2x+2} \cdot 2 = \frac{2}{2(x+1)} = \frac{1}{x+1}$

§14. Extremwertprobleme

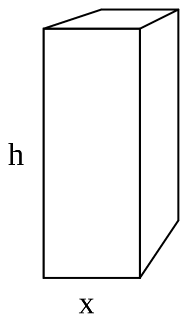
1. Beispiel

Eine quaderförmige 1-Liter-Milchtüte mit quadratischer Grundfläche soll so hergestellt werden, dass der Materialverbrauch möglichst gering ist. Berechne die Höhe h_{min} und die Länge x_{min} der Grundkante dieser Milchtüte. Gib auch den zugehörigen Flächeninhalt A_{min} der Verpackung an.

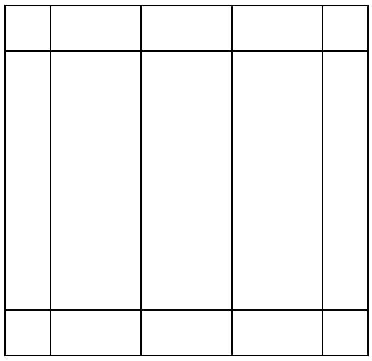
<u>Flächeninhalt A des Verpackungsmaterials</u>

Beschrifte das unten gezeichnete Netz der Milchtütenverpackung mit den Bezeichnungen für die jeweiligen Längen. Berechne dann den Flächeninhalt A der Verpackung in Abhängigkeit der Höhe h und der Länge x der Grundkante der Milchtüte.

Milchtüte:



Netz:



A = ________________________

____

<u>Abmessungen einer realen Milchtüte</u>

Miss die Längen auf der Innenseite der Milchtüte und berechne damit die restlichen Größen:

Grundkante: x = ____________dm

Höhe: h = ____________dm

Innenvolumen: V =____________ dm³

Flächeninhalt der Verpackung: A = ___________ dm²

2. Lösung von Extremwertproblemen

① Frage Dich, welche Größe minimiert bzw. maximiert werden soll.

Hier: Flächeninhalt A der Verpackung (minimiert)

② Zeichne ggf. eine Skizze und gib eine Gleichung für diese Größe an. (Hier kommen noch mehrere Unbekannte vor)

Skizze: s. oben

$A = (h + x)\cdot 4x$

③ Ermittle aus der Aufgabenstellung den Zusammenhang zwischen den Unbekannten, also die Nebenbedingung(en) und löse entsprechend auf – Benennungen weglassen.

Hier: „Literpackung" und „quadratische Grundfläche":

$h\cdot x^2 = 1\ (dm^3)$

Nebenbedingung: $h = \frac{1}{x^2}$

④ Setze die Nebenbedingung(en) ein und ermittle so den Term der Zielfunktion, in dem nur noch 1 Variable vorkommt und gib eine sinnvolle Definitionsmenge an.

$A(x) = \left(\frac{1}{x^2} + x\right)\cdot 4x$

Zielfunktion: $A(x) = \frac{4}{x} + 4x^2$ $\qquad D = \mathbb{R}^+$

⑤ Bestimme nun die Extrema der Zielfunktion mit Hilfe der Ableitung.

$A(x) = \frac{4}{x} + 4x^2$

$A'(x) = -\frac{4}{x^2} + 8x = \frac{-4 + 8x^3}{x^2}$

$A'(x) = 0$

$-4 + 8x^3 = 0$

$8x^3 = 4$

$x = \sqrt[3]{0,5}$

Für $x < \sqrt[3]{0,5}$ ist $A'(x) < 0$; für $x > \sqrt[3]{0,5}$ ist $A'(x) > 0$ (auch über VZ-Tabelle)

Also gibt es ein Minimum bei $x = \sqrt[3]{0,5}$ mit $A_{min} = A(\sqrt[3]{0,5}) = \frac{4}{\sqrt[3]{0,5}} + 4\left(\sqrt[3]{0,5}\right)^2 \approx 7,56\ (dm^2)$

⑥ Ggf. Randwertbetrachtung durchführen.
Hier wegen Monotonieverhalten nicht nötig

$\lim\limits_{x\to 0} A(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4}{x} + 4x^2\right) = \infty$

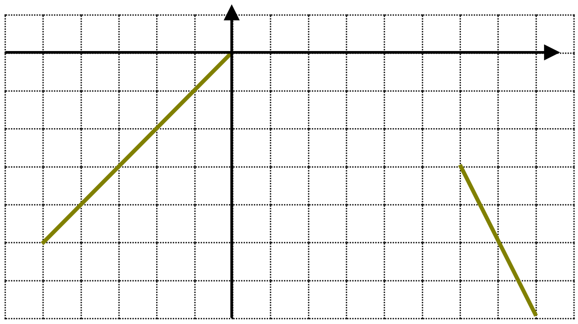
$\lim\limits_{x\to \infty} A(x) = \lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{4}{x} + 4x^2\right) = \infty$

§15. Modellieren mit Funktionen

Hier wird ein Funktionsterm gesucht, der aus vorgegebenen Bedingungen modelliert wird.

Beispiel:

Eine Straße soll möglichst harmonisch über eine Kuppe gebaut werden.
Der Graph welcher ganzrationalen Funktion möglichst geringer Ordnung ist geeignet, die beiden Straßenstücke auszurunden?



Lösung:

① Schreibe einen allgemeinen Funktionsterm auf und bestimme seine Ableitung.

Parabel erscheint geeignet

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

② Formuliere aus den Bedingungen Gleichungen und vereinfache jede. (Es müssen mindestens so viele Bedingungen auffindbar sein, wie man unbekannte Koeffizienten hat).

I	$f(0) = 0$	$0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 0$	=>	$c = 0$
II	$f'(0) = 1$	$2 \cdot 0 \cdot a + b = 1$	=>	$b = 1$
III	$f(3) = -1{,}5$	$9 \cdot a + 3 \cdot b + c = -1{,}5$	=>	$9a + 3 = -1{,}5$
IV	$f'(3) = -2$	$2 \cdot 3 \cdot a + b = -2$	=>	$6a + 1 = -2$

Es sind mehr Gleichungen als Unbekannte!

③ Löse die Gleichungen.

Aus IV $a = -0{,}5$

In III $-4{,}5 + 3 = -1{,}5$

$-1{,}5 = -1{,}5$ (w) Hier könnte auch eine falsche Aussage entstehen, dies würde bedeuten, dass das Problem von keiner quadratischen Funktion gelöst wird. Man müsste es mit einem Polynom 3. Grades versuchen.

④ Gib den Funktionsterm an.

$f(x) = -0{,}5\,x^2 + x$

Allgemeine Terme - Faustregeln:

- Polynome n-ten Grades: $ax^n + ... + mx + n$
- Rationale Funktionen: $\dfrac{ax^n + ...}{gx^m + ...}$ oder $\dfrac{a(x-x_1)(x-x_2)...}{b(x-x_5)(x-x_6)...}$
- Periodische Funktionen: $a \cdot \sin(bx + c)$, $a \cdot \cos(bx + c)$ evtl. $a \cdot \tan(bx + c)$
- Logarithmus: $a \cdot \ln(bx+c)$
- Exponential: $a \cdot e^{bx + c}$ oder $a \cdot e^{bx}$
- Glocke: $a \cdot e^{-bx^2}$

Beispiel:
Der Graph einer ganzrationalen Funktion hat in A(1|3) einen Hochpunkt und in B(3|0) einen Tiefpunkt. Bestimme einen Funktionsterm mit möglichst geringer Ordnung.

Lösung:
Es scheint eine ganzrationale Funktion 3. Grades geeignet.

① $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

②	I	$f(1) = 3$	$a + b + c + d = 3$
	II	$f(3) = 0$	$27a + 9b + 3c + d = 0$
	III	$f'(1) = 0$	$3a + 2b + c = 0$
	IV	$f'(3) = 0$	$27a + 6b + c = 0$

③	II – I	$26a + 8b + 2c = -3$ (I*)		
	IV–III	$24a + 4b = 0$ (II*)		
	I* – 2·III	$20a + 4b = -3$ (III*)		
	II* – III*	$4a = 3$		$a = 0{,}75$
	in II*	$24 \cdot 0{,}75 + 4b = 0$	$4b = 18$	$b = 4{,}5$
	a, b in III	$3 \cdot 0{,}75 + 2 \cdot 4{,}5 + c = 0$		$c = -11{,}25$
	a, b, c in I	$0{,}75 + 4{,}5 - 11{,}25 + d = 3$		$d = 9$

④ $f(x) = 0{,}75x^3 + 4{,}5x^2 - 11{,}25x + 9$
$f'(x) = 2{,}25x^2 + 9x - 11{,}25$ (nicht nötig nach Aufgabenstellung)

§16. Kurvenscharen

Bei Kurvenscharen kommt im Funktionsterm neben der Funktionsvariable noch eine weitere Unbekannte (ein konstanter Parameter) hinzu.

Zu jedem fest eingestellten Wert des Parameters gibt es einen Graphen mit x als Variable.

Bei der Kurvendiskussion verfährt man ganz normal, wobei man (z.B. beim Ableiten) beachten muss, dass der Parameter eine Konstante ist!

Besonderheiten:

1. Bestimmung von Stellen und ihrer Anzahl

Typische Aufgabenstellung:
Berechne die Nullstellen der Funktion und bestimme ihre Anzahl in Abhängigkeit von k:

$f_k(x) = \frac{x^2 - k}{x + 1} \quad D_{f_k} = \mathbb{R} \setminus \{-1\};\; k \in \mathbb{R}$

① Löse die Aufgabenstellung wie gewohnt (x ist gesucht!)

$f_k(x) = 0$
$x^2 - k = 0$
$x_{1/2} = \pm\sqrt{k}$

② Für welche k ist der Term (hier $\pm\sqrt{k}$) im Ergebnis überhaupt definiert?

$k < 0$: keine Nullstelle
$k = 0$: genau eine Nullstelle: $x = 0$
$k > 0$: genau 2 Nullstellen: $x_{1/2} = \pm\sqrt{k}$

③ Vergleich mit der Definitionsmenge:

$\pm\sqrt{k} = -1$
für $k = 1$ gibt es nur eine Nullstelle nämlich $x = +1$

④ Zusammenfassung:

keine Nullstelle:	für $k \in]-\infty; 0[$
genau 1 Nullstelle:	für $k = 1$: $x = 1$ für $k = 0$: $x = 0$
genau 2 Nullstellen:	für $k \in]0; \infty[\setminus \{1\}$

2. Unabhängigkeit vom Parameter

Erhält man bei einer Aufgabenstellung ein Ergebnis, in dem der Parameter nicht vorkommt, so ist das Ergebnis unabhängig vom Scharparameter, es trifft für alle Graphen der Schar zu.

Beispiel:

Zeige, dass alle Graphen der Schar $f_a(x) = ax + 1$ die y-Achse in demselben Punkt schneiden.

$f(0) = a \cdot 0 + 1 = 1$ unabhängig von a $\Rightarrow$ Alle Graphen schneiden die y-Achse in $S_y\,(0/1)$.

3. Ortskurve

Zeichnet man alle zum Beispiel die Extrempunkte aller Kurvenscharen, so können diese wieder einen neuen Graphen bilden. Dieser heißt dann *Ortskurve der Extrempunkte*.

Beispiel 1:

Die Graphen der Schar f_a (x) = (x – a)² + a sind Parabeln mit dem Scheitel S(a/a). Jeder Scheitel besitzt dieselbe x- wie y-Koordinate. Also liegen alle Scheitelpunkte auf der Geraden mit der Gleichung y = x.

Die Ortskurve der Scheitelpunkte hat also die Gleichung y = x

Bestimmung der Ortskurve:

① **Bestimme die Koordinaten des zu betrachtenden Punktes in Abhängigkeit vom Scharparameter.**

Beispiel: $P(k - 1 \mid k^2 - 2k + 1)$

② **Schreibe die Koordinaten als Gleichungssystem mit 2 Gleichungen auf:**

I. $x = k - 1$

II. $y = k^2 - 2k + 1$

③ **Löse die Gleichung mit x nach dem Parameter auf und setze das Ergebnis in die andere Gleichung ein:**

I.	$x = k - 1$	$\Rightarrow k = x + 1$
II.	$y = k^2 - 2k + 1$	
k in II.	$y = (x + 1)^2 - 2(x + 1) + 1$	
	$y = x^2 + 2x + 1 - 2x - 2 + 1$	
	$y = x^2 + 2$	

④ **Die entstandene Gleichung hat nun x und y als Variable und ist die Gleichung der Ortskurve:**

o: $y = x^2 + 2$

4. Gemeinsame Punkte

Aufgabe: Untersuche die Graphen der Schar f_k: $x \mapsto 2kx - k$ auf gemeinsame Punkte.

Lösung: **Wähle zwei verschiedene Parameter und setze die Terme gleich:**

$f_k(x) = f_m(x)$	$k \neq m$
$2kx - k = 2mx - m$	
$2kx - 2mx = k - m$	
$x(2k - 2m) = k - m$	$\|:(2k - 2m) \neq 0$
$x = -0,5$;	$y = f_k\,(0,5) = 0$

P(–0,5|0) ist der einzige gemeinsame Punkt.

§17. Stammfunktion

1. Definition

Eine Funktion F heißt *Stammfunktion* einer Funktion f, wenn gilt:
$F'(x) = f(x)$

Bemerkung: Jede Funktion besitzt unendlich viele Stammfunktionen, die sich alle in einer Konstanten unterscheiden. Ihre Graphen unterscheiden sich also dadurch, dass sie in y-Richtung unterschiedlich weit verschoben sind.

2. Wichtige Regeln und Funktionen mit ihren Stammfunktionen

Es gelten folgende Regeln:

$f(x) = g(x) + h(x)$	$\Rightarrow F(x) = G(x) + H(x) + C$	(Bei Summen Stammfunktionen der einzelnen Summanden bilden)
$f(x) = a \cdot g(x)$	$\Rightarrow F(x) = a \cdot G(x) + C$	(Multiplikative Konstanten bleiben)
$f(x) = g(x) + a$	$\Rightarrow F(x) = G(x) + ax + C$	(Additive Konstanten mit x multiplizieren))

$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	nur für $n \neq -1$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert + C$	
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$	
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$	
$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	$F(x) = \ln\lvert g(x)\rvert + C$	

Beispiele:

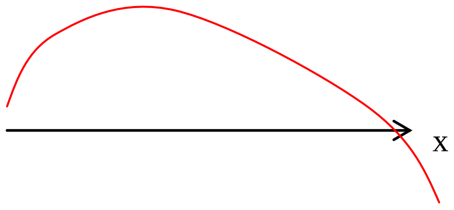
$f(x) = \frac{3x}{x^2-1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{x^2-1}$ $\quad F(x) = \frac{3}{2} \ln\lvert x^2-1\rvert + C$

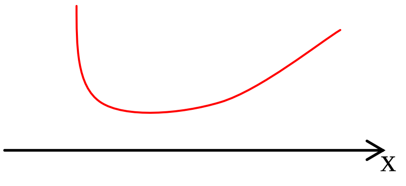
$f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ $\quad F(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + C$

§18. Die 2. Ableitung

1. Krümmungsverhalten

Ein Graph heißt in einem Intervall J *rechtsgekrümmt*, wenn die Steigung der Tangente in J monoton abnimmt.
Ein Graph heißt in einem Intervall J *linksgekrümmt*, wenn die Steigung der Tangente in J monoton zunimmt.





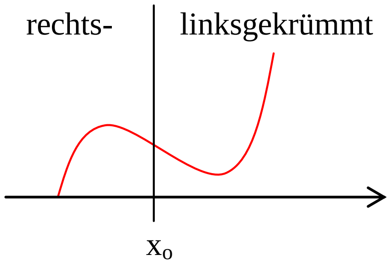
Man muss also die Ableitung f'(x) erneut ableiten, um das Änderungsverhalten der Tangentensteigung zu erhalten. Die entstehende Funktion f'' („f zwei-Strich") nennt man die *zweite Ableitung von f*. Dazu muss die Ableitung differenzierbar sein. Man sagt dann, dass f *zweimal differenzierbar* ist.

Es gilt:

Ist f stetig in [a; b], dann
$f''(x) < 0$ in]a; b[=> G_f rechtsgekrümmt in [a; b]
$f''(x) > 0$ in]a; b[=> G_f linksgekrümmt in [a; b]

2. Wendepunkt

Eine Stelle x_o, an der die Funktion zweimal differenzierbar ist und an der sich das Krümmungsverhalten ändert, heißt *Wendestelle*, der zugehörige Graphenpunkt *Wendepunkt W*.



Es gilt:

1. Ist x_o Wendestelle, dann folgt: $f''(x_o) = 0$
2. Ist $f''(x_o) = 0$, $f'''(x_o) \neq 0$ und f''' stetig an der Stelle x_o, so hat der Graph von f einen Wendpunkt an der Stelle x_o.

3. Extrempunkte-Kriterium

Ist f stetig in x_o, $f'(x_o) = 0$ und $f''(x_o) > 0$, dann hat f an der Stelle x_o ein *lokales Minimum*.
Ist f stetig in x_o, $f'(x_o) = 0$ und $f''(x_o) < 0$, dann hat f an der Stelle x_o ein *lokales Maximum*.

Achtung: Die Umkehrung gilt nicht!
z.B. $f(x) = x^4$: Tiefpunkt T(0/0), aber $f'(0) = 0$; $f''(0) = 0$

4. Beispiel

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 9x$
Gib Lage und Art der Extrempunkte des Graphen von f an und bestimme den Wendepunkt.

Lösung:

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x - 1)(x + 3)$
$f''(x) = 6x + 6 = 6(x + 1)$
$f'''(x) = 6$

Extrema: $f'(x) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 1$ $y_1 = -5$
$x_2 = -3$ $y_2 = 27$
$f''(1) = 12 > 0$ => Tiefpunkt T(1|–5)
$f''(-3) = -12 < 0$ => Hochpunkt H(–3|27)

Wendepunkte: $f''(x) = 0 \Rightarrow x_3 = -1$ $y_3 = 11$
Entweder: ① $f'''(-1) = 6 \neq 0$
Oder: ② $f''(x)$ besitzt VZW von – nach + bei $x_3 = -1$
=> Wendepunkt W(–1|11)

5. Wendetangente

Die Tangente an den Graphen einer Funktion im Wendepunkt heißt *Wendetangente*.
Aus Beispiel von oben: (Tangente: vgl. §07 | 3.)

$x_o = -1$

$f(x_o) = 11$

$f'(x_o) = 6\cdot(-1) + 6 = 0$

Wendetangente: w: $y = 11$

6. Terrassenpunkt

Ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente heißt *Terrassenpunkt*. Hier gilt $f'(x_o) = 0$, aber das Monotonieverhalten ändert sich nicht.

Ist f stetig in x_o, $f'(x_o) = 0$, $f''(x_o) = 0$ und $f'''(x_o) \neq 0$, dann ist $E(x_o \,|\, f(x_o))$ einTerrassenpunkt.

Achtung: Die Umkehrung gilt nicht!
z.B. $f(x) = x^5$: Terrassenpunkt E(0|0), aber $f''(0) = 0$; $f'''(0) = 0$

§19. Flächenberechnung

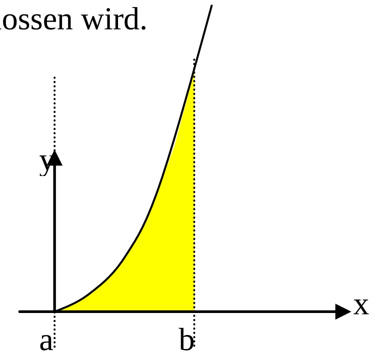
1. Streifenmethode

Problem:

Es soll der Flächeninhalt A angenähert werden, der vom Graphen einer Funktion und der x-Achse in einem bestimmten Intervall [a; b] eingeschlossen wird.

Beispiel:

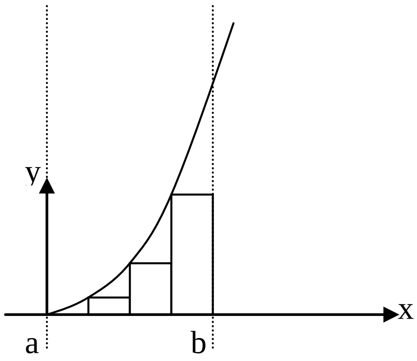
$f(x) = x^2$; $a = 0$; $b = 2$



Lösung:

Das Flächenstück wird in n rechteckige Streifen mit derselben Breite Δx zerlegt, deren Flächeninhalte addiert werden. Je größer die Anzahl n der Streifen ist, desto besser wird der gesuchte Flächeninhalt angenähert.

n = 4 Streifen dem Graphen *einbeschrieben*

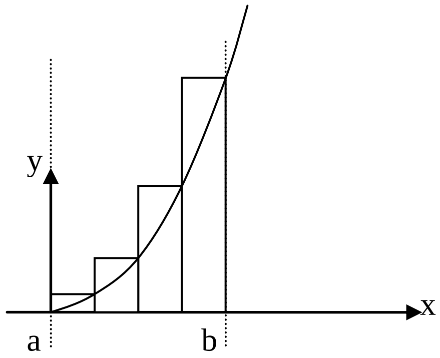


Breiten der Rechtecke: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

Höhen: ① $h_1 = f(0 \cdot ½) = 0$
② $h_2 = f(1 \cdot ½) = 0{,}25$
③ $h_3 = f(2 \cdot ½) = 1$
④ $h_4 = f(3 \cdot ½) = 2{,}25$

Fläche: $U_4 = 0 \cdot ½ + 0{,}25 \cdot ½ + 1 \cdot ½ + 2{,}25 \cdot ½ =$
$= 1{,}75$

Streifen dem Graphen *umbeschrieben*



Breiten der Rechtecke: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

Höhen: ① $h_1 = f(1 \cdot ½) = 0{,}25$
② $h_2 = f(2 \cdot ½) = 1$
③ $h_3 = f(3 \cdot ½) = 2{,}25$
④ $h_4 = f(4 \cdot ½) = 4$

Fläche: $O_4 = 0{,}25 \cdot ½ + 1 \cdot ½ + 2{,}25 \cdot ½ + 4 \cdot ½ =$
$= 3{,}75$

Merke

Die auf diese Weise bestimmte Fläche U_n heißt *Untersumme* (Rechtecke sind dem Graphen einbeschrieben) und O_n heißt *Obersumme* (Rechtecke sind dem Graphen umbeschrieben).

Es gilt stets: $U_n < A < O_n$

2. Exakter Flächeninhalt

Problem:
Wie kann mit Ober- und Untersumme der exakte Flächeninhalt A berechnet werden?

Lösung anhand des Beispiels:

① Bestimmung der Obersumme O_n für beliebiges n

Breite: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2}{n}$

$$\begin{aligned}
O_n &= \frac{2}{n}\cdot\left[f(1\cdot\frac{2}{n})+f(2\cdot\frac{2}{n})+\ldots+f(n\cdot\frac{2}{n})\right]= \\
&= \frac{2}{n}\cdot\left[\left(1\cdot\frac{2}{n}\right)^2+\left(2\cdot\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(n\cdot\frac{2}{n}\right)^2\right]= \\
&= \frac{2}{n}\cdot\left[1^2\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+2^2\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+n^2\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2\right]= \\
&= \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\left[1^2+2^2+\ldots+n^2\right] = \\
&= \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{\left[n(n+1)(2n+1)\right]}{6} = \\
&= \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(2n^2+n+2n+1)}{6} = \\
&= \frac{8}{6}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{n^3} = \frac{4}{3}\cdot\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

② Berechnung des Grenzwertes für $n \to \infty$.

$$A = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{3}\cdot\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right] = 2\frac{2}{3}$$

Analog:

Für die Untersumme U_n ergibt sich:

$$U_n = \frac{2}{n}\cdot\left[0^2\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+1^2\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+(n-1)^2\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2\right] = \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right] =$$

$$= \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{\left[(n-1)\cdot((n-1)+1)\cdot(2(n-1)+1)\right]}{6} = \frac{4}{3}\cdot\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

Somit: $A = \lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{3}\cdot\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 2\frac{2}{3}$

3. Bestimmtes Integral

Satz
Die Grenzwerte von Obersumme und Untersumme stimmen überein. Ihr Betrag gibt die Maßzahl des Flächeninhaltes A an.

Definition
Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} O_n$ (bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$) heißt *bestimmtes Integral der Funktion f in den Grenzen von a bis b.*

Schreibweise: $\int\limits_a^b f(x)dx$ „Integral von f(x)dx von a bis b“

Also gilt für f(x)= x²:

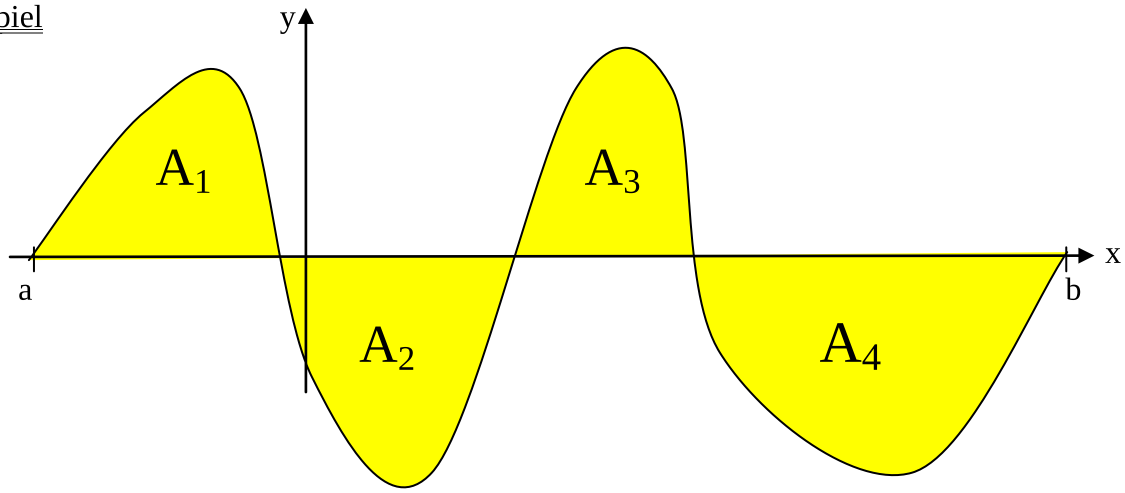
$$\int\limits_0^2 f(x)dx = \int\limits_0^2 x^2 dx = 2\frac{2}{3}$$

4. Geometrische Bedeutung

Merke:

Das bestimmte Integral entspricht der Summe der „gerichteten Flächen“ zwischen Graphen und x-Achse. Bei der Integration von links nach rechts werden Flächen unterhalb der x-Achse von den Flächen oberhalb der x-Achse subtrahiert.

Beispiel



$$\int\limits_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

§20. Der Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung HDI

1. Integralfunktion

Definition

f: t α f(t) sei eine in D_f definierte Funktion. Dann heißt die Funktion

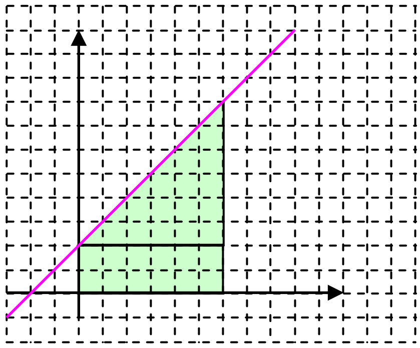
I_a: x α $I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ mit $a \in D_f$

Integralfunktion von f zur unteren Grenze a. Die Funktion f heißt *Integrandenfunktion*.

Beispiele:

Verschiedene Integralfunktionen für f: t → t + 1

$$I_0(x) = \int_0^x (t+1)dt = 1 \cdot x + \frac{1}{2} x \cdot x = \frac{1}{2} x^2 + x$$

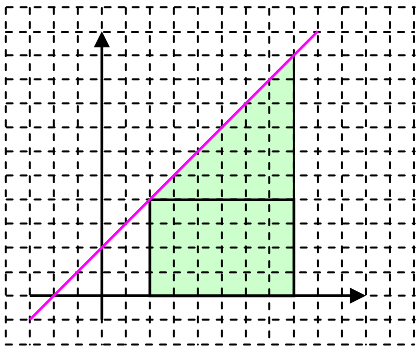


$$I_1(x) = \int_1^x (t+1)dt = 2 \cdot (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)\cdot(x-1) =$$

$$= 2x - 2 + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) =$$

$$= 2x - 2 + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x - 1\frac{1}{2}$$



Satz:

Jede Integralfunktion besitzt mindestens eine Nullstelle, nämlich die untere Integrationsgrenze.

2. Hauptsatz

Satz (HDI)

Sei f eine stetige Funktion mit dem Definitionsbereich D und a, b $\in$ D. Dann gilt:

1. Die Integralfunktion $\int_a^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von f in D

2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, wobei F eine beliebige Stammfunktion von f in D ist.

Schreibweise: F(b) – F(a) =: $[F(x)]_a^b$

Beispiele:

$\int_0^1 (6x^5)dx = [x^6]_0^1 = 1^6 - 0^6 = 1$ $\qquad$ $\int_0^\pi (\sin x)dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$

Eigenschaften:

$$-\int_a^b f(x)dx = -[F(b) - F(a)] = F(a) - F(b) = \int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = cF(b) - cF(a) = c(F(b) - F(a)) = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = [F(b) + G(b)] - [F(a) + G(a)] = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Gilt f(–x) = –f(x), so ist $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Beispiele:

$$\int_0^\pi (2\sin x + \cos x)dx = [-2\cos x + \sin x]_0^\pi = -2\cos\pi + \sin\pi + 2\cos 0 - \sin 0 = 2 + 2 = 4$$

$$\int_{-\pi}^\pi (\sin x + 4x^3)dx = 0, \text{ da } f(-x) = \sin(-x) + 4(-x)^3 = -\sin x - 4x^3 = -(\sin x + 4x^3) = -f(x)$$

Wichtige Stammfunktionen:

Schreibweise für eine beliebige Stammfunktion von f: $\int f(x)dx$ („unbestimmtes Integral“)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ für } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

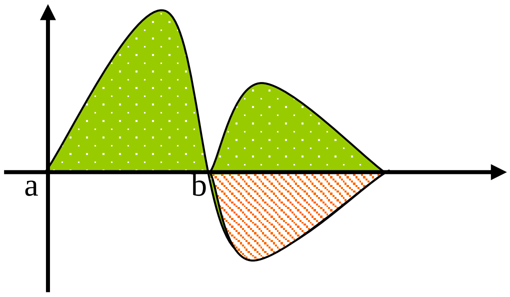
$$\int (\sin x) dx = -\cos x + C$$

$$\int (\cos x) dx = \sin x + C$$

§21. Anwendungen der Integralrechnung

1. Flächenberechnung

Um den Flächeninhalt A zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse zu berechnen, muss das Integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ berechnet werden.



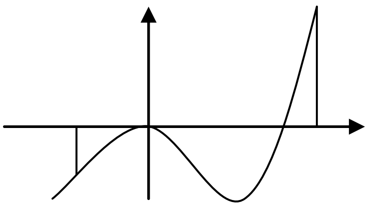
Einfacher: „Von Nullstelle zu Nullstelle integrieren“:

① Nullstellen im Intervall [a; b] berechnen ($x_1, x_2, \ldots, x_n$)

② Integration: $A = \left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_n}^{b} f(x)\,dx\right|$

Beispiel:
Bestimme den Inhalt A der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = 2x^3 - 4x^2$, der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = -2$ und $x = 1$ eingeschlossen wird.

Lösung:
① $f(x) = 0$
$2x^3 - 4x^2 = 0$
$x^2(2x - 4) = 0$
$x_1 = 0$
($x_2 = 2$ nicht im Intervall)

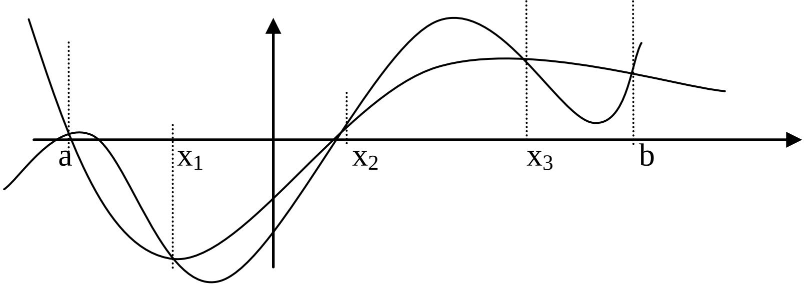


② $A = \left|\int_{-2}^{0} (2x^3 - 4x^2)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (2x^3 - 4x^2)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3}\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3}\right]_{0}^{1}\right| =$

$= \left|0 - \left(\frac{(-2)^4}{2} - \frac{4(-2)^3}{3}\right)\right| + \left|\left(\frac{1^4}{2} - \frac{4 \cdot 1^3}{3}\right) - 0\right| = \left|-2\frac{2}{3}\right| + \left|-\frac{5}{6}\right| = 3{,}5$

2. Fläche zwischen 2 Funktionsgraphen

Um die Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen f und g zu bestimmen, muss man den Betrag der Differenz der beiden Funktionen integrieren.



Also:

$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx = \left|\int_a^{x_1} [f(x) - g(x)]\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\,dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_n}^{b} [f(x) - g(x)]\,dx\right|$

Beispiel:
Bestimme das von den Graphen der Funktionen
$f(x) = x^2 + 3x + \sin x$ und $g(x) = -x^2 - 2x + \sin x$
eingeschlossene Flächenstück..

Lösung:

① Bestimme die Differenzfunktion $d(x) = f(x) - g(x)$ (evtl. größere Werte minus kleinere)

$d(x) = -x^2 - 2x + \sin x - (x^2 + 3x + \sin x) = -2x^2 - 5x$

② Bestimme die Schnittstellen der Graphen (Nullstellen von d)

$d(x) = 0$
$-2x^2 - 5x = 0$
$x(-2x - 5) = 0$
$x_1 = -2{,}5 \qquad x_2 = 0$

③ Bestimme die Fläche durch Integration der Differenzfunktion

$$A = \int_{-2,5}^{0} (-2x^2 - 5x)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2\right]_{-2,5}^{0} = 0 - \left[-\frac{2}{3}(-2{,}5)^3 - \frac{5}{2}(-2{,}5)^2\right] = 5\frac{5}{24}$$

3. Lokale Änderungsrate und Gesamtänderung

Ist der Verlauf der lokalen/momentanen Änderungsrate einer Größe gegeben, so kann man die Maßzahl der Gesamtänderung der Größe in einem Intervall als Maßzahl des Flächeninhalts zwischen Graph und x-Achse deuten und so durch Integration ermitteln.

Beispiele

f beschreibt	$\int_a^b f(x)dx$ beschreibt
momentane Verdunstungsrate von Wasser (z.B. in ml/h – Milliliter pro Stunde)	die im Zeitintervall [a;b] verdunstete Wassermenge (z.B. in ml)
Besucherrate am Einlass zu einem Konzert (z.B. in 1/min, d.h. Besucher pro min)	die im Zeitintervall [a;b] eingelassenen Besucher
Geschwindigkeit (momentane Änderungsrate des Wegs) (z.B. in m/s)	den im Zeitintervall [a;b] zurückgelegten Weg (z.B. in m)
Kraft, die längs eines Weges wirkt (z.B. in N)	die auf dem Wegintervall [a;b] verrichtete Arbeit (z.B. in Nm = J)

4. Uneigentliche Integrale

Entsteht bei der Integration ein ins Unendliche reichender Flächeninhalt (d.h. eine der Integrationsgrenzen strebt an den Rand des Definitionsbereichs), so berechnet man diesen über einen Grenzwert und nennt den Grenzwert *uneigentliches Integral*.

Beispiele für uneigentliche Integrale:

$\lim\limits_{z\to 0} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$, D =]0; ∞[$\qquad \lim\limits_{a\to\infty} \int_3^a (2 - \frac{\ln(x-1)}{x})dx$, D =]1; ∞[

§22. Exponentielles Wachstum

1. Begriff

- Wachstumsvorgänge, bei denen sich eine Größe in bestimmten Zeitabschnitten immer um denselben Wert verändert, sind linear und können mit Hilfe einer linearen Funktion f mit $f(t) = at + b$ beschrieben werden, wobei t die Variable und a sowie b Konstanten sind.
- Wachstumsvorgänge, bei denen sich eine Größe in bestimmten Zeitabschnitten immer um denselben Faktor verändert, sind exponentiell und können mit Hilfe einer Exponentialfunktion f mit $f(t) = a \cdot e^{kt}$ beschrieben werden, wobei t die Variable und k sowie a Konstanten sind.

Beispiele:

„Jeden Tag 2€ mehr“	lineares Wachstum
„Steigerung von 5% jährlich“	exponentielles Wachstum

2. Ermittlung der Konstanten

Beispiele:

Die Anzahl der Bakterien einer Bakterienkultur nimmt

a) stündlich um 30% zu

b) verdreifacht sich alle 3 Stunden

c) täglich um 5% ab.

Stelle einen Funktionsterm f(t) auf, der dieses Wachstum beschreibt, wenn die Kultur zum Zeitpunkt t = 0 aus 10 000 Bakterien besteht.

① Anfangswert bestimmen:

Der Anfangswert, also der Wert zum Zeitpunkt t = 0, ist die Konstante a. Hier: a = 10 000

② Wachstumsfaktor p ermitteln:

a) $p = 1 + 30\% = 1 + 0{,}3 = 1{,}3$

b) $p = 3$

c) $p = 1 - 5\% = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

Das Beispiel b) könnte durch den Term $f(t) = 10\,000 \cdot 2^t$ beschrieben werden, jedoch können wir diese Funktion nicht ableiten, deswegen muss dieser Term zu $10\,000 \cdot e^{kt}$ verwandelt werden:

$10\,000 \cdot e^{kt} = 10\,000 \cdot 2^t$

$e^{kt} = 2^t \mid \ln$

$kt = t \cdot \ln 2$

$t(k - \ln 2) = 0$ gilt für $t = 0$ oder $k = \ln 2$

damit ist die Konstante $k = \ln p$

③ Funktionsterm aufschreiben und die Bedeutung der Variablen angeben:

a) $f(t) = 10000 \cdot e^{t \cdot \ln 1{,}3}$ (t in Stunden)

b) $f(t) = 10000 \cdot e^{t \cdot \ln 3}$ (t in 3 Stunden)

c) $f(t) = 10000 \cdot e^{t \cdot \ln 0{,}95}$ (t in Tagen)

Ein Wachstumsprozess, bei dem der Bestand in einem bestimmten Zeitintervall um einen bestimmten Faktor zunimmt/abnimmt kann durch die Exponentialfunktion
f mit $f(t) = a \cdot e^{kt}$
beschrieben werden.
Dabei ist a der Anfangswert, also der Bestand zum Zeitpunkt t = 0, k = lnp und p der Wachstumsfaktor.
Es gilt bei Zunahme (Bsp. a) und b)): $k > 0$ und bei Abnahme (Bsp. c)): $k < 0$.

3. Halbwertszeit/Verdopplungszeit

Den Zeitpunkt T_H bzw. T_D, zu dem sich der Bestand halbiert bzw. verdoppelt hat, nennt man *Halbwertszeit* bzw. *Verdopplungszeit*

Ermittlung:

Es gilt:	$f(T_H) = 0{,}5 \cdot f(0)$	bzw.	$f(T_D) = 2 \cdot f(0)$
Also:	$a \cdot e^{k \cdot T_H} = 0{,}5\ a \cdot e^{k \cdot 0}$	bzw.	$a \cdot e^{k \cdot T_D} = 2\ a \cdot e^{k \cdot 0}$
	$e^{k \cdot T_H} = 0{,}5$	bzw.	$e^{k \cdot T_D} = 2$
	$k \cdot T_H = \ln 0{,}5$	bzw.	$k \cdot T_D = \ln 2$

Damit: $T_H = \frac{\ln 0{,}5}{k} = \frac{\ln 0{,}5}{\ln p}$ bzw. $T_D = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{\ln p}$

Beispiele:

a) $T_D = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}3} \approx 2{,}64$ Also beträgt die Verdopplungszeit 2,64 Stunden.

b) $T_D = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}63$ Also beträgt die Verdopplungszeit 0,63·3h = 1,89 h = 1h 54 min

c) $T_H = \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}95} \approx 13{,}51$ Also beträgt die Halbwertszeit 13,51 Tage

TIPP: Viele Aufgaben lassen sich am besten dadurch lösen, dass man einen Ansatz wie oben macht.

Beispiel

Das radioaktive Isotop Jod131 besitzt eine Halbwertszeit von 8,3 Jahren. Nach welcher Zeit sind 10% der Kerne zerfallen?

Lösung:

Aufstellen des Funktionsterms (wie unter 2.)

- ▶ a = 100% = 1
- ▶ k ermitteln mit der Formel für die Halbwertszeit $T_H = \frac{\ln 0{,}5}{k} \Rightarrow k = \frac{\ln 0{,}5}{T_H} \Rightarrow k = \frac{\ln 0{,}5}{8{,}3}$
- ▶ $f(t) = e^{\frac{\ln 0{,}5}{8{,}3} \cdot t}$

Ansatz: f(t) = 0,9·f(0) OBACHT: „10% zerfallen“ heißt: 90% vorhanden

$e^{\frac{\ln 0,5}{8,3}\cdot t} = 0,9 \quad => \quad \frac{\ln 0,5}{8,3} t = \ln 0,9 \quad => \quad t = 8,3\frac{\ln 0,9}{\ln 0,5} \approx 1,26$

Antwort: Nach 1,26 Jahren sind 10% zerfallen.

4. Momentane Wachstumsrate

Der Wert der Ableitung $f'(t_o)$ gibt wieder die *momentane Wachstumsrate* zum Zeitpunkt t_o an. (vgl. §03 | 2.)

Beispiel: *Momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt 4 h für Bsp.b)*

$t_o = \frac{4}{3}$; $f(t) = 10000\cdot e^{t\cdot\ln 3}$ $f'(t) = 10000\cdot e^{t\cdot\ln 3}\cdot \ln 3$

$f'\left(\frac{4}{3}\right) = 10000 \ln 3\cdot e^{\frac{4}{3}\ln 3} \approx 47534$; Wachstumsrate: 47534 Bakterien pro 3h bzw. 15844 pro h